1. **Resolução da lista 3 (parte 2).**

1)

a) $X_i \stackrel{iid}{\sim} U(0,1)$, possui densidade $f_{X_i}(x) = I_{(0,1)}(x)$ e portando sua função de distribuição é

$$F_{X_n}(x) = xI_{(0,1)}(x) + I_{[1,\infty)}(x).$$

Agora encontraremos as distribuições de $Y_n = X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ e $Z_n = X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

$$G_{Y_n}(y) = P(Y_n \le y) = P\left(X_{(1)} \le y\right) = 1 - P\left(X_{(1)} > y\right) = 1 - P(X_1 > y, \ldots, X_n > y)$$

$$\stackrel{ind}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) \stackrel{idt}{=} 1 - [P(X_1 > y)]^n = 1 - (1-y)^n,$$

então

$$g_{Y_n}(y) = G'_{Y_n}(y) = (1 - (1-y)^n)' = n(1-y)^{n-1} I_{(0,1)}(y),$$

logo $Y_n \sim Beta(1, n)$.

$$\mathbb{E}\left[Y_n^r\right] = \frac{\int_0^1 y^r (1-y)^{n-1} dy}{Beta(1,n)} = \frac{Beta(r+1, n)}{Beta(1,n)} = \frac{\frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n)}{\Gamma(r+n+1)}}{\frac{\Gamma(1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}} = \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(r+n+1)},$$

assim

$$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{\Gamma(2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{1}{n+1},$$

$$\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] = \frac{\Gamma(3)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+3)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

e

$$\operatorname{Var}(Y_n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n+2-n-2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n] = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Var}(Y_n) = 0$ então $Y_n \stackrel{P}{\Rightarrow} 0$ $\Rightarrow Y_n \stackrel{D}{\Rightarrow} 0$, pois convergência em probabilidade implica convergência em distribuição.

$$G_{Z_n}(z) = P(Z_n \le z) = P\left(X_{(n)} \le z\right) = P(X_1 \le z, \ldots, X_n \le z)$$

$$\stackrel{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le z) \stackrel{idt}{=} [P(X_1 \le z)]^n = z^n,$$

então

$$g_{Z_n}(z) = G'_{Z_n}(z) = (z^n)' = nz^{n-1} I_{(0,1)}(z),$$

logo $Z_n \sim Beta(n,1)$.

$$\mathbb{E}\left[Z_n^r\right] = \frac{\int_0^1 z^r (z)^{n-1} dz}{Beta(n,1)} = \frac{Beta(r+n,1)}{Beta(n,1)} = \frac{\frac{\Gamma(r+n)\Gamma(1)}{\Gamma(r+n+1)}}{\frac{\Gamma(n)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}} = \frac{n\Gamma(r+n)}{\Gamma(r+n+1)} = \frac{n}{r+n},$$

assim

$$\mathbb{E}\left[Z_n\right] = \frac{n}{r+n} = \frac{n}{n+1},$$

$$\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] = \frac{n}{2+n}$$

e

$$\mathrm{Var}\left(Y_n\right) = \frac{n}{2+n} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = n\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Z_n\right] = 1$ e $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(Z_n\right) = 0$ então $Z_n \overset{P}{\Rightarrow} 1 \Rightarrow Z_n \overset{D}{\Rightarrow} 1$, pois convergência em probabilidade implica convergência em distribuição.

b)

$$G_{U_n}(u) = P\left(U_n \le u\right) = P\left(nY_n \le u\right) = P\left(Y_n \le \frac{u}{n}\right) = G_{Y_n}\left(\frac{u}{n}\right)$$

então

$$g_{U_n}(u) = G'_{Y_n}\left(\frac{u}{n}\right) = g_{Y_n}\left(\frac{u}{n}\right)\frac{1}{n} = n\left(1-\frac{u}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n} = \left(1-\frac{u}{n}\right)^{n-1} I_{(0,n)}(u),$$

tomando o limite,

$$\lim_{n\to\infty} g_{U_n}(u) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{n-1} I_{(0,n)}(u)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{n} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{u}{n}\right)^{-1} \lim_{n\to\infty} I_{(0,n)}(u) = e^{-u} * 1 * I_{(0,\infty)}(u),$$

portanto $U_n \overset{D}{\Rightarrow} Exp(1)$.

$$G_{V_n}(v) = P\left(V_n \le v\right) = P\left(n(1-Z_n) \le v\right) = P\left(1-Z_n \le \frac{v}{n}\right)$$

$$= P\left(Z_n > 1-\frac{v}{n}\right) = 1 - G_{Z_n}\left(1-\frac{v}{n}\right)$$

então

$$g_{V_n}(v) = G'_{Z_n}\left(1-\frac{v}{n}\right) = g_{Z_n}\left(1-\frac{v}{n}\right)\frac{1}{n} = n\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n} = \left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1} I_{(0,n)}(v),$$

tomando o limite,

$$\lim_{n\to\infty} g_{V_n}(v) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n-1} I_{(0,n)}(v)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{v}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{v}{n}\right)^{-1}\lim_{n\to\infty} I_{(0,n)}(v) = e^{-v} * 1 * I_{(0,\infty)}(v),$$

portanto $V_n \overset{D}{\Rightarrow} Exp(1)$.

2) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid com $\mathbb{E}[X_1] = \mu_X \neq 0$ e $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma_X^2$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid com $\mathbb{E}[Y_1] = \mu_Y$ e $\mathrm{Var}(Y_1) = \sigma_Y^2$, além disso as duas sequências são independentes entre si. Queremos encontrar o limite em distribuição de

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n}{\mu_X\overline{X}_n}\right).$$

Note que

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] \overset{iid}{=} \frac{n\mu_X}{n} = \mu_X$$

e

$$\mathrm{Var}\left(\overline{X}_n\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \overset{ind}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) \overset{idt}{=} \frac{n\sigma_X^2}{n^2} = \frac{\sigma_X^2}{n},$$

cosequentemente, $\overline{X}_n \sim (\mu_X, \sigma_X^2/n)$ e por uma argumentação análoga $\overline{Y}_n \sim (\mu_Y, \sigma_Y^2/n)$. Continuando este raciocínio,

$$\mu_X\overline{Y}_n \sim (\mu_X\mu_Y, \mu_X^2\sigma_Y^2/n),$$
$$\mu_Y\overline{X}_n \sim (\mu_X\mu_Y, \mu_Y^2\sigma_X^2/n)$$

e

$$\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n \sim (0, \mu_X^2\sigma_Y^2/n + \mu_Y^2\sigma_X^2/n),$$

devido a independência entre as duas sequências.

Vale ressaltar que podemos decompor o numerador como

$$\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mu_X Y_i - \mu_Y X_i),$$

então pelo teorema central do limite,

$$\sqrt{n}\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_X Y_i - \mu_Y X_i\right) - 0\right)}{\sqrt{\mu_X^2\sigma_Y^2/n + \mu_Y^2\sigma_X^2/n}} \overset{D}{\Rightarrow} N(0, \mu_X^2\sigma_Y^2/n + \mu_Y^2\sigma_X^2/n).$$

E ao mesmo tempo $\mu_X\overline{X}_n \overset{q.c.}{\Rightarrow} \mu_X^2$, pois

$$\mu_X\overline{X}_n = \mu_X\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

e os X_i têm média μ_X, são integráveis e são iid, daí segue o resultado.

Finalmente vemos que $Z_n \overset{D}{\Rightarrow} N(0, \mu_X^{-2}\sigma_Y^2/n + \mu_X^{-4}\mu_Y^2\sigma_X^2/n)$, pois

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n}{\mu_X\overline{X}_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n}{\lim_{n\to\infty}\mu_X\overline{X}_n}$$

$$= \frac{N(0, \mu_X^2\sigma_Y^2/n + \mu_Y^2\sigma_X^2/n)}{\mu_X^2} = N(0, \mu_X^{-2}\sigma_Y^2/n + \mu_X^{-4}\mu_Y^2\sigma_X^2/n).$$

Um aspecto importante desta questão é que $\mu_X\overline{X}_n \overset{q.c.}{\Rightarrow} \mu_X^2$, isto é, $\mu_X\overline{X}_n$ é um estimador fortemente consistente de μ_X^2. Quando temos um estimador fortemente consistente, "no limite ele é como uma constante" por isso geralmente podemos substituir um parâmetro por um estimador fortemente consistente em estatísticas assintóticas, intervalos de confiança assintóticos e teste de hipóteses assintóticos.

3) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid com $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 0$ e $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid com $\mathbb{E}\left[Y_1\right] = \mu$. Queremos encontrar o limite em distribuição de

$$\overline{Y}_n + \sqrt{n}X_n.$$

Note que

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} \mu,$$

pela lei forte de Kolmogorov (supondo que os Y_i são integráveis), como convergência quase certa implica convergência em probabilidade, temos, $\overline{Y}_n \overset{P}{\Rightarrow} \mu$.

Perceba que

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim (0, \sigma^2/n),$$

logo pelo teorema central do limite,

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n}{\sqrt{\sigma^2}} = \sqrt{n}\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 0\right)}{\sqrt{\sigma^2}} \overset{D}{\Rightarrow} N(0,1),$$

$$\sqrt{n}X_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - 0\right) \overset{D}{\Rightarrow} N(0,\sigma^2).$$

Finalmente, pelo teorema de Slutsky, obtemos

$$\overline{Y}_n + \sqrt{n}X_n \overset{D}{\Rightarrow} N(\mu,\sigma^2).$$

4) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias iid com $\mathbb{E}\left[X_1\right] = 0$. Queremos encontrar o limite

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{Y_n}(t),\ Y_n = cos(\overline{X}_n).$$

Note que

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} 0,$$

pela lei forte de Kolmogorov (supondo integrabilidade dos X_i). Como $cos(\cdot)$ é uma função contínua então a convergência é preservada, ou seja,

$$Y_n = cos(\overline{X}_n) \overset{q.c.}{\Rightarrow} cos(0) = 1.$$

Então concluímos que Y_n converge quase certamente para uma variável degenerada no ponto 1 e como convergência quase certa implica convergência em probabilidade e convergência em probabilidade implica convergência em distribuição, temos que $Y_n \overset{D}{\Rightarrow}= 1$. Mas também sabemos que se uma variável aleatória converge em distribuição então sua função característica converge para a função característica da distribuição limite, isto é,

$$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}\left[e^{itY_n}\right] \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} e^{it*1}P(Y=1) = e^{it}.$$

5) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis iid com distribuição $U(0,\theta)$. Queremos encontrar o limite em distribuição de

$$\sqrt{n}\left(\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)\right).$$

Analisando melhor essas quantidades vemos que $\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta) = \ln(2\overline{X}_n/\theta)$ e $2\overline{X}_n/\theta \sim U(0,2)$. Sejam $Y_i = 2X_i/\theta$ e $\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$.

$$\mathbb{E}\left[Y_i\right] = 1,$$
$$\mathbb{E}\left[Y_i^2\right] = \int_0^2 y^2/2dy = \left.\frac{y^3}{6}\right|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

e

$$\mathrm{Var}\left(Y_i\right) = \mathbb{E}\left[Y_i^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[Y_i\right]\right)^2 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Pelo teorema central do limite, temos

$$\sqrt{n}\frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - 1\right)}{\sqrt{\frac{1}{3}}} \overset{D}{\Rightarrow} N(0,1),$$
$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i - 1\right) \overset{D}{\Rightarrow} N\left(0, \frac{1}{3}\right).$$

Agora basta aplicarmos o método Delta com a função $\ln(\cdot)$ para concluir a questão.

$$\sqrt{n}\left(\ln(\overline{Y}_n) - \ln(1)\right) \overset{D}{\Rightarrow} N\left(0, \frac{1}{3}(\ln'(1))^2\right) = N\left(0, \frac{1}{3}\right),$$
$$\sqrt{n}\ln(\overline{Y}_n) \overset{D}{\Rightarrow} N\left(0, \frac{1}{3}\right),$$

mas

$$\overline{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 2X_i/\theta \Rightarrow \ln(\overline{Y}_n) = \left(\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)\right),$$

portanto

$$\sqrt{n}\left(\ln(2\overline{X}_n) - \ln(\theta)\right) \overset{D}{\Rightarrow} N\left(0, \frac{1}{3}\right).$$

E-mail address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil