MAE 224 - PROBABILIDADE II
Terceira Lista Continuada de Exercícios
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Defina $Y_n = \min\{X_1,...,X_n\}$, $Z_n = \max\{X_1,...,X_n\}$, $U_n = nY_n$ e $V_n = n(1-Z_n)$. Prove que:

a) $Y_n \rightarrow^P 0$ e $Z_n \rightarrow^P 1$.

b) $U_n \rightarrow^D W$ e $V_n \rightarrow^D W$ onde W tem distribuição exponencial padrão.

2) Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[X_1] = \mu_X$ e $Var(X_1) = \sigma_X^2$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[Y_1] = \mu_Y$ e $Var(Y_1) = \sigma_Y^2$. Suponha que os X_j e os Y_k sejam independentes e que $\mu_X \neq 0$. Qual o limite em distribuição de

$$Z_n = \sqrt{n}(\frac{\overline{Y}_n}{\overline{X}_n} - \frac{\mu_Y}{\mu_X}).$$

Obs: $Z_n = \sqrt{n}(\frac{\mu_X\overline{Y}_n - \mu_Y\overline{X}_n}{\mu_X\overline{X}_n})$.

3) Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[X_1] = 0$ e $Var(X_1) = \sigma^2$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[Y_1] = \mu$.

Use o Teorema de Slutsky para provar que

$$\overline{Y}_n + \sqrt{n}\overline{X}_n \rightarrow^D N(\mu, \sigma^2).$$

4) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. tais que $E[X_1] = 0$. Ache o $\lim_{n\to\infty} \varphi_{Y_n}(t)$, onde $Y_n = cos(\overline{X}_n)$.

5) Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição uniforme no intervalo $(0, \theta)$ com $\theta > 0$. prove que

$$\sqrt{n}(\ln 2\overline{X}_n - \ln \theta) \to^D N(0, \frac{1}{3}).$$