1. TÓPICO 1

1.1. **Funções Características.**

Se a e b são constantes reais, $z = a+ib$, onde $i = \sqrt{-1}$ define um número complexo. O conjugado de z é $\overline{z} = a - ib$. O produto $z\overline{z} = a^2+b^2$ e $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ define a norma de z.

Se uma função real tem expansão em série de potência com raio de convergência positivo, podemos usar série de potência para definir uma função de variável complexa.

O desenvolvimento de Taylor, em torno de um ponto a, de uma função $g(\cdot)$ infinitamente diferenciável é

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(n)}(a)\frac{(t-a)^n}{n!}.$$

O desenvolvimento da função exponencial, $g(t) = e^t$, em torno do ponto 0 é

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

e definimos

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

para qualquer número complexo z. Temos $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ para quaisquer números complexos z_1 e z_2. em particular se $z = e^{it}$

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = 1 + it - \frac{t^2}{2} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!}\dots$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right) + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots\right) = cos(t) + isen(t).$$

Observe que se $f(t) = cos(t)$ então $f(0) = 1$,

$$\begin{array}{cccc} f'(t) = -sen(t) & f''(t) = -cos(t) & f'''(t) = sen(t) & f^{(4)}(t) = cos(t) \\ f'(0) = 0 & f''(0) = -1 & f'''(0) = 0 & f^{(4)}(0) = 1 \end{array}$$

e a série de Taylor em torno do ponto 0 é

$$cos(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \dots\right)$$

assim

$$cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \text{e} \qquad sen(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Temos também que

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it}e^{-it}} = \sqrt{(cos(t) + isen(t))(cos(t) - isen(t))} = \sqrt{cos^2(t) + sen^2(t)} = 1.$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções de t a valores reais então $h(t) = f(t)+ig(t)$ define uma função complexa em t com $h'(t) = f'(t) + ig'(t)$.

Exemplo 1.1.

$$e^{zt} = e^{at+ibt}.$$

Exemplo 1.2.

$$\left(e^{zt}\right)' = \left(e^{at+ibt}\right)' = \left(e^{at}e^{ibt}\right)' = \left(e^{at}(cos(bt) + isen(bt))\right)' = \left(e^{at}cos(bt) + ie^{at}sen(bt)\right)'$$

$$= \left(ae^{at}cos(bt) - be^{at}sen(bt)\right) + i\left(ae^{at}sen(bt) + be^{at}cos(bt)\right)$$

$$= e^{at}\left[a(cos(bt) + isen(bt)) + ib(cos(bt) + isen(bt))\right] = e^{at}\left[(a + ib)e^{ibt}\right] = (a+ib)e^{at+ibt} = ze^{zt},$$

ou seja, $\left(e^{zt}\right)' = ze^{zt}$.

Exemplo 1.3.

$$\left(e^{it}\right)' = ie^{it}.$$

Se $\int_a^b f(t)dt$ e $\int_a^b g(t)dt$ existem, temos $\int_a^b h(t)dt = \int_a^b f(t)dt+i\int_a^b g(t)dt$.

$$\int_a^b e^{zt}dt = \left.\frac{e^{zt}}{z}\right|_a^b = \frac{e^{zb} - e^{za}}{z},$$

pelo teorema fundamental do cálculo. Como consequência,

$$\int_a^b e^{it}dt = \frac{e^{ib} - e^{ia}}{i}.$$

Note que

$$\int_a^b e^{it}dt == \int_a^b cos(t) + isen(t)dt = \int_a^b cos(t)dt + i\int_a^b sen(t)dt$$

$$= sen(t)|_a^b - i\ cos(t)|_a^b = (sen(b) - sen(a)) - i(cos(b) - cos(a))$$

$$= \frac{cos(b) - cos(a) + isen(b) - isen(a)}{i} = \frac{e^{ib} - e^{ia}}{i}.$$

Se X e Y são variáveis aleatórias (reais), podemos escrever uma v.a. complexa como $Z = X + iY$.

Definição 1.4.

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + i\mathbb{E}[Y],$$

sempre que $\mathbb{E}[X]$ e $\mathbb{E}[Y]$ estão bem definidas. Z tem esperança finita se e só se $\mathbb{E}|Z| < \infty$ e neste caso $|\mathbb{E}[Z]| \leq \mathbb{E}|Z|$.

$$\mathbb{E}[a_1 Z_1 + a_2 Z_2] = a_1\mathbb{E}[Z_1] + a_2\mathbb{E}[Z_2],$$

é válida onde a_1 e a_2 são números complexos e Z_1 e Z_2 são variáveis aleatórias complexas com esperanças finitas.

Definição 1.5. Seja X uma v.a. (real), $t \in \mathbb{R}$, então $|e^{itX}| = 1$ e $\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$, $-\infty < t < \infty$ existe.

Definiremos a função característica de X por $\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$.

Note que:

P1: $\varphi_X(0) = 1$.

$$|\varphi_X(t)| = \left|\mathbb{E}\left[e^{itX}\right]\right| \leq \mathbb{E}\left[|e^{itX}|\right] = \mathbb{E}[1] = 1.$$

P2: Se X é degenerada em θ, isto é, $P(X = \theta) = 1$, temos

$$\varphi_X(t) = e^{it\theta},$$

se $\theta = 0$ então $\varphi_X(t) = 1$.

P3: X é simétrica, em torno de 0, se $f(x) = f(-x)$

$$P(X \leq x) = P(X \geq -x) = P(-X \leq x) \leftrightarrow X \stackrel{D}{=} -X.$$

Então

$$\overline{\varphi_X(t)} = \overline{\mathbb{E}[e^{itX}]} = \mathbb{E}[cos(tX) - isen(tX)] = \mathbb{E}[cos(t(-X)) + isen(t(-X))]$$

$$= \varphi_{-X}(t) = \varphi_X(t) \leftrightarrow \text{ a parte imaginária é zero.}$$

Portanto X é simétrica em torno de zero se e só se $\varphi_X(t)$ é real.

P4: Se X é uma v.a. e a, b são constantes reais, então

$$\varphi_{a+bX}(t) = \mathbb{E}\left[e^{it(a+bX)}\right] = e^{ita}\mathbb{E}\left[e^{itbX}\right] = e^{ita}\varphi_X(tb)$$

Exemplo 1.6. Se $X \sim exp(\lambda)$, então

$$\varphi_X(t) = \lambda \int_0^\infty e^{itx}e^{-\lambda x}dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x}dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}\, e^{-(\lambda-it)x}\Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Observe que $\lim_{x\to\infty} e^{-(\lambda-it)x} = 0$ pois $\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda} = 0$ e e^{-itx} é limitado em x.

Exemplo 1.7. $Y \sim U(-1,1)$

$$\varphi_Y(t) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{itx}}{2} dx = \frac{1}{2} \left. \frac{e^{itx}}{it} \right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{it} \right) = \frac{sen(t)}{t}.$$

Exemplo 1.8. $Y_1, \ldots, Y_n, Y \overset{iid}{\sim} Cauchy$

$$\mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} cos(tx) dx = e^{-|t|}$$

e

$$\mathbb{E}\left[e^{it\frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{i\frac{t}{n}Y_i}\right] \overset{ind}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{i\frac{t}{n}Y_i}\right] \overset{idt}{=} \prod_{i=1}^{n} e^{-\left|\frac{t}{n}\right|} = e^{-|t|}$$

então $\overline{Y}_n \sim Cauchy$ e $\overline{Y}_n \overset{D}{=} Y$.

Teorema 1.9. *Se $\mathbb{E}\left[|\mathbb{X}^{\ltimes}|^{\ltimes}\right] < \infty$, então $\varphi_X(t)$ possui n derivadas contínuas e*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF_X(x),\ k = 1, \ldots, n$$

e em particular $\varphi_X^k(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right]$
Prova:
$n = 1$

$$\frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \int \left(\frac{e^{i(t+h)x} - e^{itx}}{h} \right) dF(x) = \int e^{itx} \left(\frac{e^{ihx} - 1}{h} \right) f(x) dx = \mathbb{E}\left[e^{itx} \frac{(e^{ihx} - 1)}{h} \right],$$

contudo,

$$\lim_{h\to 0} e^{itx} \frac{(e^{ihx} - 1)}{h} = e^{itx} ix$$

e

$$\left| e^{itx} \left(\frac{e^{ihx} - 1}{h} \right) \right| = \underbrace{\left| e^{itx} \right|}_{=1} \left| \frac{\int_0^h ixe^{isx}}{h} ds \right| \leq |x| \left| \frac{\int_0^h e^{isx}}{h} ds \right| \leq |x|$$

e $\mathbb{E}\left[|X|\right] < \infty$.

Pelo teorema da convergência dominada,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} = \mathbb{E}\left[e^{itX} iX \right] = \int ixe^{itx} f(x) dx$$

e o mesmo vale para outros momentos.

Observação 1.10. (Convergência Dominada) Se $\lim X_n = X$, $\mathbb{E}[X]$ está bem definida, $|X_n| \leq Y, \forall\ n$ e $\mathbb{E}|Y| < \infty$, então

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} X_n\right] = \mathbb{E}[X].$$

Teorema 1.11. *$\varphi_X(t)$ é uniformemente contínua, isto é,*

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 \text{ tal que se } |t-s| < \delta \Rightarrow |\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| < \epsilon.$$

Observação 1.12. Note que δ depende somente de ϵ. Uma função uniformemente contínua é contínua em todo ponto, mas a recíproca não vale: $f(x) = x^2$ é contínua na reta mas não é uniformemente contínua.

Demonstração. Prova:

$$|\varphi_X(t) - \varphi_X(s)| \leq \int \left|e^{itx} - e^{isx}\right| f(x)dx = \int \left|e^{i(t-s)x} - 1\right| f(x)dx = h(t-s),$$

$h(u) = \mathbb{E}\left[|e^{iux} - 1|\right]$ e $0 \leq |e^{iux} - 1| \leq 2$ e pelo teorema da convergência dominada

$$\lim_{u\to 0} \mathbb{E}\left[\left|e^{iux} - 1\right|\right] = \mathbb{E}\left[\lim_{u\to 0}\left|e^{iux} - 1\right|\right] = 0.$$

□

Teorema 1.13. *Se X é uma v.a. e $Y = a + bX$, e $a, b \in \mathbb{R}$ então*

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\left[e^{i(a+bX)t}\right] = \mathbb{E}\left[e^{iat}e^{ibXt}\right] = e^{iat}\mathbb{E}\left[e^{ibXt}\right] = e^{iat}\varphi_X(bt).$$

Um resultado importante é

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itX)^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \mathbb{E}[X^n]\, t^n}{n!}.$$

Exemplo 1.14. $X \sim N(0, \sigma^2)$, então

$$\mathbb{E}\left[X^{2k+1}\right] = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbb{E}\left[X^{2k}\right] = \frac{\sigma^{2k}(2k)!}{2^k k!}$$

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\mathbb{E}\left[X^{2k}\right] t^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\sigma^2 t^2/2\right)^k}{k!} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Se $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$X = Y - \mu \sim N(0, \sigma^2)$$

$$Y = X + \mu$$

$$\varphi_Y(t) = e^{it\mu}\varphi_X(t) = e^{it\mu}e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \exp\left(it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

Exemplo 1.15. $X \sim P(\lambda)$, logo, $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

$$\varphi'_X(t) = \lambda e^{it} i e^{\lambda(e^{it}-1)}$$
$$\varphi'_X(0) = \lambda i = i\mathbb{E}\left[X\right] \leftrightarrow \mathbb{E}\left[X\right] = \lambda$$
$$\varphi''_X(t) = \lambda i^2 e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)} + \lambda e^{it} i^2 \lambda e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}$$
$$\varphi''_X(0) = \lambda i^2 + \lambda^2 i^2 = (\lambda + \lambda^2) i^2$$
$$i^2\mathbb{E}\left[X^2\right] = (\lambda + \lambda^2) i^2 \leftrightarrow \mathbb{E}\left[X^2\right] = (\lambda + \lambda^2)$$

2. Fórmula da Inversão

Teorema 2.1. *Seja X uma v.a. com valores nos inteiros,($\varphi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{itj} P(X = j)$). Então*

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt$$

Demonstração.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{itj}P(X = j)\right) dt$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X = j)\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}dt$$

Ocorre que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}dt = \begin{cases} 1 \text{ se } j = k \\ 0 \text{ se } j \neq k \end{cases}.$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)t}dt = \frac{e^{i(j-k)t}}{i(j-k)}\left.\frac{1}{2\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(j-k)\pi} - e^{-i(j-k)\pi}}{2\pi i(j-k)} = \frac{sen((j-k)\pi)}{\pi(j-k)} = 0$$

e portanto

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\varphi_X(t)dt = P(X = k).$$

□

Exemplo 2.2. Considere uma variável aleatória X com valores inteiros e com função característica $\varphi_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n$. Qual a sua função de probabilidade.

Utilizando o teorema aima temos que

$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}(pe^{it} + 1 - p)^n dt =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \Sigma_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (pe^{it})^j (1-p)^{n-j} dt =$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} \binom{n}{j} (p)^j (1-p)^{n-j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} e^{itj} dt = \binom{n}{k} (p)^k (1-p)^{n-k}.$$

Teorema 2.3. *Se X e Y são independentes e $Z = X + Y$,*

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{E}\left[e^{it(X+Y)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \mathbb{E}\left[e^{itY}\right] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t).$$

Teorema 2.4. Fórmula da Inversão

Se X é uma variável aleatória contínua com função característica $\varphi_X(t)$ integrável

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)| dt < \infty.$$

Então sua função densidade de probabilidade é

$$f_X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

Exemplo 2.5. Seja X é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty.$$

Estamos interessados em calcular sua função característica $\varphi_X(t)$:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{itx} \frac{1}{2} e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-x} dx = \int_{0}^{\infty} e^{-itx} \frac{1}{2} e^{-x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{2} e^{-x} dx =$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \left(\frac{e^{-itx} + e^{itx}}{2}\right) dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} costx dx.$$

Contudo, integrando por partes obtemos

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x} costx dx = 1 - t^2 \int_{0}^{\infty} e^{-x} costx dx$$

e concluimos que

$$\int_0^\infty e^{-x} costxdx = \frac{1}{1+t^2} = \varphi_X(t).$$

Usando a fórmula da inversão, do teorema anterior, temos

$$\frac{1}{2}e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}dt.$$

e concluimos que a distribui cão de Cauchy padrão tem função característica $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$.

Exemplo 2.6. Se X é uma variável aleatória com distribuição $N(0, \sigma^2)$, a sua função característica é $\varphi_X(t) = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, isto é

$$e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Se, na expressão acima, substituirmos t por $-t$ e σ por $\frac{1}{\sigma}$, temos

$$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}}dx,$$

isto é

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}}dx.$$

Observação 2.7. Seja Y uma variável aleatória com distribuição normal padrão e c uma constante real a função característica de cY é $\varphi_{cY}(t) = e^{-\frac{c^2t^2}{2}}$. Seja X uma variável aleatória, independente de Y, com função característica $\varphi_X(t)$.

A função característica de $Z = X + cY$ é

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t).e^{-\frac{c^2t^2}{2}}.$$

Como $\varphi_Z(t)$ é integrável, aplicamos o teorema acima e obtemos

$$f_z(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)e^{-\frac{c^2t^2}{2}}dt.$$

se integramos a expressão acima sobra o intervalo $(a, b]$ e aplicamos o teorema de Fubine temos

$$P(a < X + cY \leq b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_a^b e^{-itx}dx)\varphi_X(t)e^{-\frac{c^2t^2}{2}}dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{e^{-ibt}-e^{-iat}}{-it})\varphi_X(t)e^{-\frac{c^2t^2}{2}}dt.$$

Fazendo c convergir para 0 e a convergir para $-\infty$ na expressão acima, obtemos a função de distribuição de X que, pela expressão à direita, depende exclusivamente da função característica de X. O resultado é enunciado abaixo.

Teorema 2.8. Teorema da Unicidade

Se duas variáveis aleatórias tem mesma função característica, então tem mesma função de distribuição.

Exemplo 2.9. Seja X uma variável aleatória com distribuição binomial de parâmetros n e $p, 0 < p < 1$ e seja Y uma variável aleatória, independente de X, com distribuição binomial de parâmetros m e $p, 0 < p < 1$. As funções características de X e Y são

$$\varphi_X(t)) = (q + pe^{it})^n \quad e \quad \varphi_Y(t)) = (q + pe^{it})^m$$

respectivamente, onde $q = 1 - p$.

Portanto $\varphi_{X+Y}(t) = (q + pe^{it})^{n+m}$ e concluimos que $X + Y$ tem distribuição binomial de parâmetros $n + m$ e $p, 0 < p < 1$.

Exemplo 2.10. Se X é uma variável aleatória com função característica $\varphi_X(t) = cos^2(t)$, qual sua função de probabilidade?

Observe que a função característica é real , isto é $\varphi_X(t) = E[cosXt]$.

Podemos, tambem,escrever que

$$\varphi_X(t) = cos^2(t) = \frac{1 + cos2t}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2t.$$

Se definimos $X = 0$ com probabilidade $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ e $X = 2$ com probabilidade $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ obtemos, pelo teorema da unicidade, o resultado.

No que segue enunciaremos os teoremas que relacionam a convergência em distribuição com a convergência das respectivas funções características.

Teorema 2.11. Teorema de Helly-Bray

Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias. Sejam $(F_n)_{n\geq 1}$ e F as suas respectivas funções de distribuições tais que $F_n \to^D F$. Então, para toda função g contínua e limitada temos

$$E[g(X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF_n(x) \to_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x) = E[g(X)].$$

Observação 2.12. Em particular, podemos aplicar o teorema acima para as funções $cos(t)$ e $sen(t)$ que são contínuas e limitadas, obtendo

$$\varphi_{X_n}(t) = E[e^{itX_n}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (cos(tx) + isen(tx)) dF_n(x) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(tx) dF_n(x) + \int_{-\infty}^{\infty} isen(tx) dF_n(x) \rightarrow_{n\rightarrow\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} cos(tx) dF(x) + i\int_{-\infty}^{\infty} sen(tx) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \varphi_X(t).$$

Teorema 2.13. Teorema da continuidade de Paul - Levy

Seja $(F_{X_n})_{n\geq 1}$ uma sequência de funções de distribuições e $(\varphi_{X_n})_{n\geq 1}$ a sequência de suas respectivas funções características. Se $\varphi_{X_n}(t)$ converge pontualmente para $\varphi(t)$ e φ é contínua no ponto 0, então:

a) Existe uma variável aleatóia X, com função de distribuição F_X tal que $F_n \rightarrow^D F$ e

b) φ é função característica de X.

Demonstração. Pela fórmula da inversão temos

$$f_{X_n}(x) == \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_{X_n}(t)dt.$$

Seja

$$f_X(x) == \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt.$$

Portanto

$$P(a < X_n \leq b) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_{X_n}(t)dt)dx =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\int_a^b e^{-itx} dx)\varphi_{X_n}(t)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{it})\varphi_{X_n}(t)dt \rightarrow_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{it})\varphi_X(t)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\int_a^b e^{-itx} dx)\varphi_X(t)dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}(\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dx)\varphi_X(t)dt = \int_a^b f_X(x)dx = P(a < X \leq b).$$

Assim

$$P(X_n \leq b) = \rightarrow_{a\rightarrow-\infty} P(a < X_n \leq b) = \rightarrow_{a\rightarrow-\infty} P(a < X \leq b) = P(X \leq b).$$

$\square$

Exemplo 2.14. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim B(n,p)$ e tal que $\lim_{n\to\infty} np = \lambda$.

A função característica de X_n é

$$\varphi_{X_n}(t) = (1-p+pe^{it})^n = (1-\frac{\lambda}{n}+\frac{\lambda}{n}e^{it})^n = (1-\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1))^n$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} = \varphi_X(t)$$

que é contínua no ponto 0 e é a função característica de ume variável aleatória com distribuição de Poisson.

Exemplo 2.15. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim N(0,n)$ com função característica $\varphi_{X_n}(t) = e^{-\frac{t^2 n}{2}}$.

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = 1 \quad se \quad t=0 \quad e \quad 0 \quad se \quad t\neq 0$$

que não é contínua em $t=0$ e portanto não é função característica.

Observe que

$$P(X_n \leq x) = P(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \leq \frac{x}{\sqrt{n}} = P(Z \leq \frac{x}{\sqrt{n}}) \to_{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

Observação 2.16. Se z é um número complexo tal que $|z-1|<1$, podemos definir, através da série de Taylor

$$\ln z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - ....$$

Temos as propriedades usuais: $z = e^{\ln z}$, $\ln 1 = 0$ se $|z-1|<1$. Se X é uma variávelsl aleatória, a sua função característica $\varphi_X(t)$ é contínua, $\varphi_X(0)=1$ e assim $\ln \varphi_X(t)$ é bem definida para t próximo de zero.

Se $E[X]=\mu<\infty$, então $\varphi_X^{'}(0) = i\mu$. Portanto

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln \varphi_X(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - \ln \varphi_X(0)}{t} = \frac{d \ln \varphi_X(t)}{dt}|_{t=0} = \frac{\varphi_X^{'}(0)}{\varphi_X(0)} = i\mu.$$

Consequentemente temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - i\mu t}{t} = 0.$$

Suponha que $Var(X) = \sigma^2 < \infty$, então $\varphi_X^{''}(0) = -E[X^2] = -(\mu^2 + \sigma^2)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln \varphi_X(t) - i\mu t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\varphi_X^{'}(t)}{\varphi_X(t)} - i\mu}{2t} =$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_X^{'}(t)-i\mu\varphi_X(t)}{2t\varphi_X(t)}=$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_X^{''}(t)-i\mu\varphi_X^{'}(t)}{2\varphi_X(t)+2t\varphi_X^{'}(t)}=$$

$$\frac{\varphi_X^{''}(0)-i\mu\varphi_X^{'}(0)}{2\varphi_X(0)}=\frac{-(\mu^2+\sigma^2)-(i\mu)^2}{2}=-\frac{\sigma^2}{2}.$$

Portanto

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln\varphi_X(t)-i\mu t}{t^2}=-\frac{\sigma^2}{2}.$$

Teorema 2.17. Teorema do Limite Central

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média $E[X_1]=\mu$ e variância $Var(X_1)=\sigma^2<\infty$. Então

$$\lim_{n\to\infty}P(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leq x)=P(Z\leq x),\quad -\infty<x<\infty.$$

onde $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ e Z tem distribuição normal padrão.

Demonstração. Seja $S_n^*=\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. então

$$\varphi_{S_n^*}(t)=E[e^{itS_n^*}]=E[e^{it(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}})}]=$$

$$e^{-\frac{itn\mu}{\sigma\sqrt{n}}}E[e^{\frac{itS_n}{\sigma\sqrt{n}}}]=$$

$$e^{-\frac{itn\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^n.$$

Portanto

$$\varphi_{S_n^*}(t)=\exp\{n[\ln\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})-\frac{i\mu(t}{\sigma\sqrt{n}})]\}.$$

Contudo

$$\lim_{n\to\infty}n[\ln\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})-i\mu(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})]=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t^2}{\sigma^2}\frac{\ln\varphi_{X_1}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})-i\mu(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})}{(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})^2}=$$

$$\frac{t^2}{\sigma^2}(-\frac{\sigma^2}{2})=-\frac{t^2}{2}.$$

Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty}n\varphi_{S_n^*}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}=\varphi_Z(t).$$

Pelo teorema da unicidade temos o resultado. □

Como uma extensão do Teorema do Limite Central, pode-see provar que (ver Barri James)

Teorema 2.18. *Sejam* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias tais que*

$$\sqrt{n}(Y_n - \mu) \to^D N(0, \sigma^2).$$

Se $g(y)$ *é uma função derivável no ponto* μ*, então*

$$\sqrt{n}(g(Y_n) - g(\mu)) \to^D N(0, \sigma^2(g^{'}(\mu))^2).$$

Exemplo 2.19. Pelo Teorema do limite central temos

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to^D N(0, 1)$$

que é equivalente a

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \to^D N(0, 1).$$

Pelo Teorema de Slutsky concluimos que

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \to^D N(0, \sigma^2).$$

Pelo teorema anterior, se consideramos $g(x) = x^2$, temos

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \to^D N(0, 4\mu^2\sigma^2).$$

Se consideramos $g(x) = \frac{1}{x}$ temos, se $\mu \neq 0$

$$\sqrt{n}(\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{1}{\mu}) \to^D N(0, \frac{\sigma^2}{\mu^4}).$$

E-mail address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil