22 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A propagação de ondas eletromagnéticas ocorre quando um campo elétrico variante no tempo produz um campo magnético também variante no tempo, que por sua vez produz um campo elétrico, e assim por diante, ocorrendo desta forma, a propagação de energia. As ondas eletromagnéticas podem se propagar tanto no espaço livre, como através de outros meios e dispositivos, especialmente projetados e construídos para esse fim.

22.1 – Ondas Eletromagnéticas Planas

Ondas eletromagnéticas planas são aquelas que se propagam em um **única** direção. São boas aproximações de ondas reais em aplicações práticas. Configurações mais complexas podem ser obtidas como superposições de ondas planas. Em uma onda eletromagnética plana os vetores intensidade de campo magnético e de campo elétrico são perpendiculares entre si em **todos** os pontos do espaço. A figura 22.1 ilustra uma onda plana se propagando na direção perpendicular ao papel e para fora deste. Observemos que a propagação da onda se dá na direção do produto vetorial $\vec{E} \times \vec{H}$, direção esta conhecida e obtida pela **regra da mão direita**.

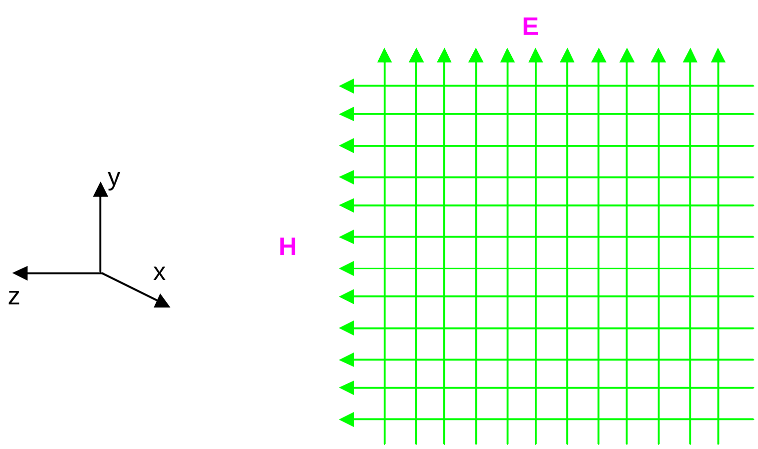

Figura 22.1 – Onda plana se propagando para fora do plano do papel

Em uma onda eletromagnética plana, os vetores intensidade de campo elétrico e de campo magnético possuem apenas uma componente cada, perpendiculares entre sí. Por isso, essa onda é conhecida também como uma onda eletromagnética transversal, ou TEM (**T**ransverse **E**lectro**M**agnetical). Para nossas deduções, vamor considerar que o vetor intensidade de campo magnético possui apenas a componente em z, e o vetor intensidade de campo elétrico possui sua única componente em y. Sendo esta uma onda TEM, a direção de propagação se dará na direção x. Em outras palavras, $\vec{E}$ e $\vec{H}$ só variam na direção x, o que pode ser visto na figura 22.2

Para encontrar a expressão de uma onda eletromagnética plana, vamos nos reportar às equações (21.26) e (21.27) do capítulo anterior, dadas na forma diferencial. Vamos ainda admitir que esta onda eletromagnética propaga-se em um meio isento de cargas livres ($\rho = 0$), e sem perdas, ou seja, com condutividade nula ($\sigma = 0$).
Mediante tais hipóteses, repetindo aqui estas mesmas expressões temos:

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (22.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (22.2)$$

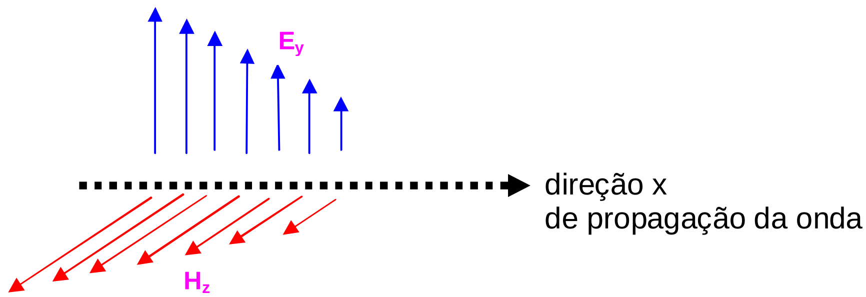

Figura 22. 2 – polarização e direção de propagação de onda onda plana

Desenvolvendo o rotacional do vetor intensidade de campo magnético em coordenadas cartesianas (lado esquerdo da equação 22.1) e expressando a derivada temporal do vetor intensidade de campo elétrico teremos:

$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(E_x\,\hat{a}_x + E_y\,\hat{a}_y + E_z\,\hat{a}_z\right) \qquad (22.3)$$

Pelas considerações feitas sobre esta onda plana, o campo magnético só admite a componente em z e o campo elétrico apenas em y. Ainda pela característica apresentada o campo magnético não varia na direção y. Desta forma, a equação (22.3) se reduz a:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x}\hat{a}_y = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}.\hat{a}_y \qquad (22.4)$$

Ou pela identidade vetorial:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (22.5)$$

Desenvolvendo agora o rotacional do vetor intensidade de campo elétrico da equação (22.2),e expressando a derivada temporal do vetor intensidade de campo magnético em coordenadas cartesianas, temos:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{a}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{a}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{a}_z = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(H_x\,\hat{a}_x + H_y\,\hat{a}_y + H_z\,\hat{a}_z\right) \qquad (22.6)$$

Pela hipótese da onda plana e pela invariabilidade do campo elétrico na direção z, a equação (22.3) se reduz a:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{a}_z = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}\hat{a}_z \qquad (22.7)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \qquad (22.8)$$

Derivando (22.5) em relação a *t* e (22.8) em relação a *x*, teremos:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{22.9}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) \tag{22.10}$$

Pela identidade entre (22.9) e (22.10):

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{22.11}$$

A equação da onda em E_y fica:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{22.12}$$

Analogamente, fazendo a operação inversa, ou seja, derivando (22.8) em relação a *t* e (22.5) em relação a *x*, teremos a equação da onda em H_z. Assim,

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \tag{22.13}$$

Fica nítida a dualidade apresentada pelas equações (22.12) e (22.13), expressando o mesmo fenômeno eletromagnético, podendo assim ser utilizadas indistintamente.

Podemos perceber que tanto na equação (22.12) como na equação (22.13) aparece o termo $\mu_0\varepsilon_0$. Fazendo $v^2 = 1 / (\mu_0\varepsilon_0)$ podemos escrever:

$$v^2 = \frac{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}}{\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}} = \frac{\dfrac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}}{\dfrac{\partial^2 H_z}{\partial x^2}} \tag{22.14}$$

O parâmetro v tem dimensão de velocidade, uma das características do meio. Para o vácuo ou espaço livre temos:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\times 10^{-7}\,.\,\dfrac{10^{-9}}{36\,\pi}}} = 3.10^8\ m/s \tag{22.15}$$

Esta é a velocidade de propagação de qualquer onda eletromagnética no espaço livre, praticamente a velocidade da luz no vácuo (2,99792458 x 10^8 m/s) calculada muito antes do surgimento da teoria eletromagnética. Mais uma prova de que a luz é uma onda eletromagnética, em acordo com a demonstração teórica de Maxwell.

A equação de onda (22.12) é uma equação diferencial a derivadas parciais, linear e de segunda ordem que devemos encontrar uma solução. Aqui, nos restringiremos a apresentar uma possível solução para ela, e mostrar que essa solução é correta. Seja a seguinte proposta de solução:

$$E_y = E_0 \,\mathrm{sen}\left[\beta(x + mt)\right] \tag{22.16}$$

A constante $\beta = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda, *m* uma constante a determinar e *t* o tempo.

Derivando (22.16) uma vez em relação a x, teremos:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \beta E_0 \cos\left[\beta(x + mt)\right] \tag{22.17}$$

Derivando novamente em relação a x:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\beta^2 E_0 \,\mathrm{sen}\left[\beta(x + mt)\right] \tag{22.18}$$

Derivando agora (22.16) em relação a t:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = m\beta E_0 \cos\left[\beta(x + mt)\right] \tag{22.19}$$

Derivando novamente em relação a t:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -m^2\beta^2 E_0 \,\mathrm{sen}\left[\beta(x + mt)\right] \tag{22.20}$$

Substituindo (22.19) e (22.20) em (22.12) considerando (22.15), temos:

$$-m^2\beta^2 E_0 \,\mathrm{sen}\left[\beta(x + mt)\right] = -v^2\beta^2 E_0 \,\mathrm{sen}\left[\beta(x + mt)\right] \tag{22.21}$$

Assim, a equação (22.16) é uma solução para (22.12) se

$$m = \pm v \tag{22.22}$$

Sendo v a velocidade de propagação da onda, uma solução geral para a equação (22.12) é:

$$E_y = E_0 \,\mathrm{sen}\left[\beta(x + vt)\right] + E_0 \,\mathrm{sen}\left[\beta(x - vt)\right] \tag{22.23}$$

Qualquer termo de (22.23) isoladamente também é uma solução, assim como a soma dos dois termos. Soluções para a equação (22.12) também podem ser escritas de outra maneira, como exponenciais, outras funções trigonométricas, ou qualquer outra função que varia harmonicamente.

Uma vez que v = λ f, segue-se que:

$$\beta v = \frac{2\pi}{\lambda}\lambda f = 2\pi f = \omega \tag{22.24}$$

onde f é a freqüência, em Hz, e ω a velocidade (ou freqüência) angular em rad/s. Assim, a equação (22.23) pode ser escrita como:

$$E_y = E_0 \,\mathrm{sen}(\beta x + \omega t) + E_0 \,\mathrm{sen}(\beta x - \omega t) \tag{22.25}$$

Admitindo que o primeiro termo em (22.25) seja uma solução, vamos analisá-la em função de βx, para diversos instantes de tempo t ilustrados na figura 22.3.

Para t = 0,. $\omega t = 0$ e $E_y = E_0 \mathrm{sen}(\beta x)$, como mostra a curva (a).
Para t = T/4, $\omega t = (2\pi/T)(T/4) = \pi/2$ e $E_y = E_0 \mathrm{sen}(\beta x + \pi/2) = E_0 \cos(\beta x)$, conforme a curva (b).

Para t = T/2, $\omega t = (2\pi/T)(T/2) = \pi$ e $E_y = E_0 sen(\beta x + \pi) = -E_0 sen(\beta x)$, correspondendo à curva (c).
Para t = 3T/4, $\omega t = (2\pi/T)(3T/4) = 3\pi/2$ e $E_y = E_0 sen(\beta x + 3\pi/2) = -E_0 \cos(\beta x)$, o que corresponde à curva (d).

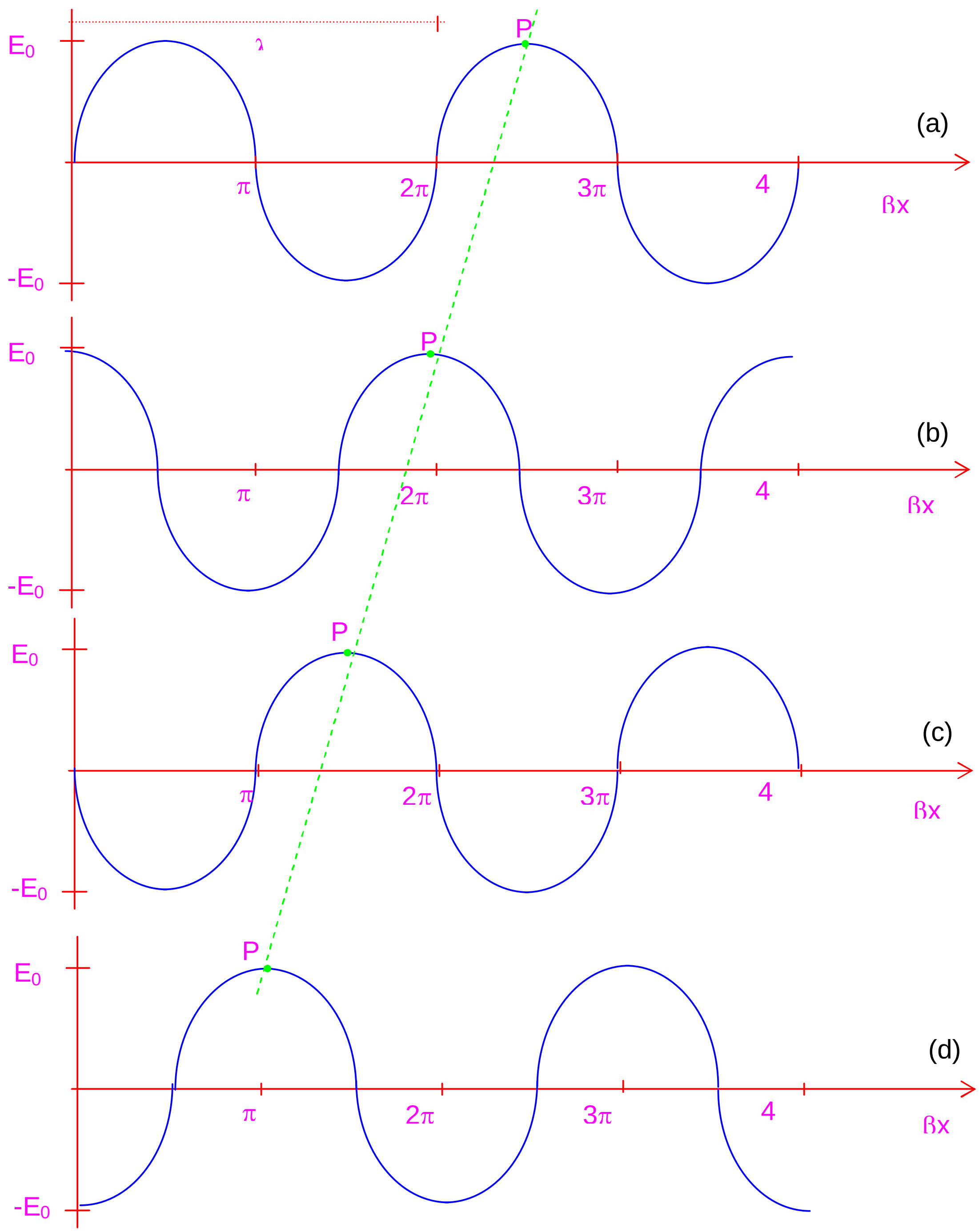

Figura 22.3 – cuvas para E_y em 4 instantes de tempo

Fixando nossa atenção numa fase da onda, ou seja, no ponto P, podemos perceber que ele caminha para a esquerda com uma velocidade v. Portanto, o termo escolhido da equação (22.29), representa a propagação de uma onda retrógrada ou aquela que caminha na direção negativa.

O ponto P é chamado de “ponto de fase constante”.
Assim, no caso da onda retrógrada em análise podemos escrever em termos cinemáticos que:

$$x + vt = cte \tag{22.30}$$

$$\frac{dx}{dt} + v = 0 \tag{22.31}$$

$$\frac{dx}{dt} = -v \tag{22.32}$$

v é, portanto, a velocidade de um ponto de fase constante, ou simplesmente a velocidade de fase da onda.

Exemplo 22.1

No espaço livre $\vec{E}(z,t) = 10^3 \operatorname{sen}(2\pi \times 10^8 t - 2{,}04\,z)\,\hat{a}_y$. Obtenha $\vec{H}(z,t)$ e esboce $\vec{E}$ e $\vec{H}$, para t = 0.

Solução:

O vetor intensidade de campo elétrico está polarizado na direção y positiva. A onda está se propagando na direção positiva do eixo z. Pela regra da mão direita ou pelo produto vetorial, o vetor intensidade de campo magnético está polarizado na direção negativa de x, conforme pode ser observado na figura 22.4.

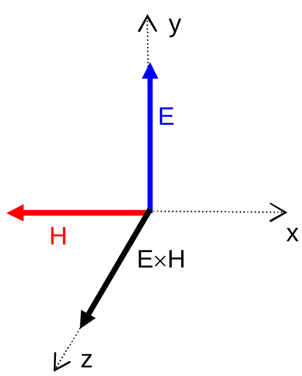

Figura 22.4 – Produto vetorial, para determinar a direção de H

Pela equação (pontual) de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Desenvolvendo o rotacional fica:

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 2{,}04 \times 10^3 \cos\left(2\pi \times 10^8\, t - 2{,}04z\right)\hat{a}_x$$

Integrando:

$$\vec{B} = -\frac{2{,}04 \times 10^3}{2\pi \times 10^8} \operatorname{sen}\left(2\pi \times 10^8\, t - 2{,}04z\right)\hat{a}_x$$

$$\vec{B} = -0{,}325 \times 10^{-5} \operatorname{sen}\left(2\pi \times 10^8\, t - 2{,}04z\right)\hat{a}_x \quad \mathrm{T}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -2{,}584 \operatorname{sen}\left(2\pi \times 10^8\, t - 2{,}04\,z\right)\hat{a}_x \quad \mathrm{A/m}$$

Para t = 0, sen ($\omega t - \beta z$) = – sen (βz)

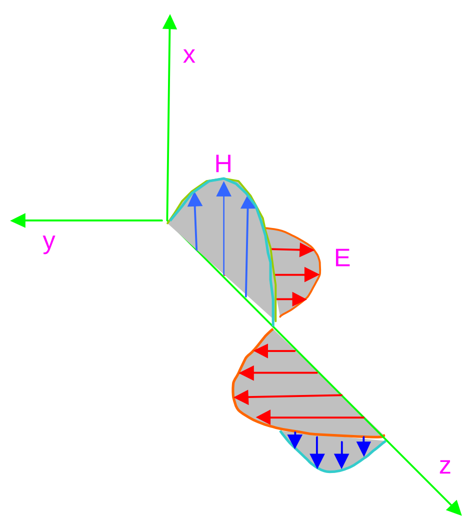

Figura 22.5 – Esboço das ondas E e H

EXERCÍCIOS

1)- No espaço livre:

$$\vec{H}(z,t) = 1{,}0\, e^{\,j\left(1{,}5\times10^{8}\,t\, +\, \beta z\right)}\,\hat{a}_x$$

Obtenha uma expressão para $\vec{E}(z,t)$ e determine a direção de propagação.

2)- No espaço livre:

$$\vec{H}(z,t) = 1{,}33\times10^{-1}\cos\left(4\times10^{7}\,t - \beta z\right)\hat{a}_x \quad (A/m)$$

Obtenha uma expressão para $\vec{E}(z,t)$. Encontre β e λ.

3)- Calcule a amplitude e a direção da onda

$$\vec{E}(z,t) = 10\,\mathrm{sen}(\omega t - \beta z)\,\hat{a}_x - 15\,\mathrm{sen}(\omega t - \beta z)\,\hat{a}_y$$

em t = 0, z = 3λ/4. Se a onda se propaga no espaço livre, encontre a expressão para $\vec{H}(z,t)$.