TEXTOS DE APOIO AO PROFESSOR DE FÍSICA
Nº 11, 2000

TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

TRIESTE F. RICCI

INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS

TEXTOS DE APOIO AO PROFESSOR DE FÍSICA
Nº 11, 2000

TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

TRIESTE F. RICCI

INSTITUTO DE FÍSICA - UFRGS

Textos de apoio ao professor de física, nº 11, 2000
PAS - Programa de Atualização em Serviço para Professores de Física
GRUPO DE ENSINO

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pela Biblioteca do Instituto de Física-UFRGS
Por: Letícia Strehl - CRB 10/1279

R491t Ricci, Trieste F.
Teoria da relatividade especial / Trieste F. Ricci. - Porto Alegre : Instituto de Física - UFRGS, 2000.
36 p. : il. (Textos de apoio ao professor de física ; n. 11)

1. Relatividade especial 2. Física geral I. Título

CDU 53:37
PACS F01.55.

Reimpressão

Apresentação

Este texto é o resultado de um curso introdutório à Relatividade Especial de Einstein, apresentado na 3ª edição do projeto PROCIÊNCIAS/CAPES/FAPERGS, no Instituto de Física da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (IF-UFRGS). Portanto, trata-se de um texto concebido para servir de apoio a professores do segundo grau que desejem aprender ou simplesmente reciclar seus conhecimentos a respeito da teoria da Relatividade Especial.

Optamos por uma abordagem tradicional, fortemente baseada na própria gênese da teoria e em seu desenvolvimento histórico inicial, o qual pretende seguir em seus passos cruciais. Desta maneira, evitou-se propositalmente aqueles aspectos mais geometrizantes da teoria, os quais são abordados apenas na parte final do curso. Uma abordagem alternativa, que realça precisamente tais aspectos, pode ser encontrada no curso virtual e ilustrado desenvolvido pelo professor Michel E. Betz, IF-UFRGS, indicado no final do texto.

A carga horária total utilizada foi de 8 horas, divididas em quatro módulos de 2 horas. Ao longo do texto encontram-se exercícios propostos, parte dos quais foram resolvidos pelo professor em sala de aula.

Agradecemos à professora Maria Helena Steffani pelo convite que nos levou a desenvolver finalmente este material.

Porto Alegre, novembro de 2000.

Trieste F. Ricci

Sumário

Teoria da Relatividade Especial

T.F. Ricci

A Relatividade Galileana

Para entender o significado da teoria da Relatividade Especial de Einstein, bem como seu desenvolvimento histórico e conceitual, é necessário entender antes o que hoje se conhece como Relatividade de Galileu (Galileu Galilei, 1564-1642).

Na Física Clássica, o espaço é encarado como sendo de natureza totalmente diversa da do tempo. O espaço é um contínuo (tri dimensional) de pontos, o tempo é um contínuo (uni dimensional) de instantes. O espaço se *ocupa*, o tempo se *passa*. O espaço é tacitamente tomado como sendo Euclidiano, ou seja, satisfazendo os postulados de Euclides (a linha reta é a menor distância entre dois pontos, por exemplo). E o tempo é como um rio imaginário, cujo fluxo, o "passar" do tempo, é sempre igual, independentemente de onde nos encontramos no espaço e também de nosso estado de movimento. O fluxo do tempo também é independente de fatores psicológicos, desde que se tome o cuidado de medir o passar do tempo com "réguas de tempo" objetivas (livres de subjetividade), que são os segundo e seus múltiplos e submúltiplos como medidos por um relógio. Como escreveu Newton no tomo I dos *Principia,* "o tempo absoluto, verdadeiro e matemático, em si mesmo e de sua própria natureza, flui regularmente sem relação a nada externo". Mas nenhuma conexão existe entre espaço e tempo.

Todos sabemos que para se descrever quantitativamente o movimento de partículas ou de corpos materiais é necessário dispor de um *sistema de coordenadas,* também chamado de *referencial.* De maneira genérica, podemos definir um sistema de coordenadas cartesianas como sendo um sistema de três eixos imaginários orientados x, y e z, cruzando-se ortogonalmente num ponto chamado a origem do sistema. De modo mais concreto, podemos também supor que tal sistema de eixos esteja rigidamente acoplado a algum corpo material, uma sala de aula cúbica, por exemplo, em que cada um dos três eixos seriam as linhas do encontro das paredes e das paredes com o piso. Desse modo, comparando através de medidas as posições assumidas por uma partícula, por exemplo, com relação às paredes da sala, podemos traçar a trajetória seguida pela partícula. É claro que a pessoa que descreve tal movimento deve dispor de um relógio presumivelmente perfeito em seu funcionamento, com o qual mede a passagem do tempo. A pessoa utilizando o sistema de coordenadas e dotada de um relógio é o que chama-se na Física clássica de um *observador.*

A Relatividade Galileana trata justamente da descrição do movimento dos corpos como descritos por uma classe especial de observadores chamados de *observadores inerciais referenciais inerciais*). Um referencial é inercial se nele vale a primeira Lei de Newton (1642-1727) do movimento, a chamada Lei da Inércia:

> *"Um corpo permanecerá em repouso ou em movimento retilíneo uniforme sempre que nenhuma força externa resultante atuar sobre ele".*

Na verdade, a primeira lei de Newton serve exatamente para decidir se um dado referencial é ou não é inercial. É isso que faz dela uma lei realmente independente da segunda lei do movimento, caso contrário deveríamos encará-la como um mero caso particular desta, para o caso em que a força resultante é nula. A segunda lei relaciona a aceleração adquirida pelo corpo com a força resultante nele aplicada. Se o referencial usado pelo observador for inercial, então a resultante será a soma vetorial de todas as forças *físicas* que agem sobre o corpo, ou seja, todas aquelas forças cuja origem pode ser identificada com algum agente físico, como, por exemplo, as forças de contato, as gravitacionais, as eletromagnéticas, etc. Caso contrário, utilizando-se um referencial não inercial para descrever o movimento do corpo, a segunda lei só dará resultados corretos se adicionarmos à resultante forças ditas *fictícias*, por que não podem ser atribuídas à ação de um agente fisicamente identificável. Um ônibus em M.R.U.V. com respeito à Terra, por exemplo, não é um referencial inercial, pois uma bola colocada inicialmente em repouso relativo sobre uma mesa dentro do ônibus se acelera (com respeito ao ônibus), muito embora nenhum agente físico externo esteja exercendo uma força resultante sobre ela (lembre-se de que o peso ou força gravitacional com a qual a Terra atrai a bola para baixo é cancelada pela reação normal do tampo da mesa, uma força macroscópica de contato com origem no eletromagnetismo microscópico da matéria, de modo que a resultante física é nula). Tudo se passa como se existisse uma "força inercial" puxando para trás todos os objetos dentro do ônibus. Outro exemplo é o da força que chamamos de centrífuga, que parece nos empurrar para fora do centro da curva que fazemos, quando estamos sentados dentro de um automóvel. Trata-se de uma força fictícia ou inercial, pois não se pode atribuir sua origem a algum agente físico localizado a uma certa distância do corpo ou em contato com ele. A "intensidade" da força centrífuga depende não de um agente externo físico, mas da velocidade com que a curva é realizada, com respeito ao solo. Portanto ela não depende de nada externo ao referencial, e sim do próprio estado de movimento do referencial (nossos alunos muitas vezes aplicam a segunda lei de Newton para descrever a mecânica em relação a um referencial que gira, e obtêm a solução correta para o problema considerando como parte da resultante uma força fictícia e centrífuga cujo valor é exatamente o da força centrípeta - mv^2/R, onde R é o raio da curva). Na verdade, a força centrífuga é uma mera ilusão de nossos sentidos, que a interpretam como uma força real, pois a sensação da força centrífuga é decorrência de se estar usando um referencial não inercial para descrever o movimento. Como no exemplo do carro (que será o referencial) fazendo uma curva: o passageiro (o corpo cujo movimento é estudado) sente-se empurrado para fora da curva, contra a parede do carro mais externa à curva, mas na realidade, por sua inércia, ele tende a seguir em cada instante em linha reta para a frente, enquanto o carro (referencial) está constantemente se interpondo à sua frente, por estar fazendo uma curva.

Um outro exemplo de referencial não inercial é um carrossel girando. Se o carrossel *não estiver* girando, uma bola colocada em repouso relativo no seu piso assim permanecerá indefinidamente enquanto nenhuma resultante atuar sobre ela e a acelerar. Mas se o carrossel está girando, a bola não mais permanecerá em repouso relativo: para alguém que esteja no carrossel e que o utiliza como corpo de referência, a bola se acelerará e terminará seguindo uma trajetória curvada para fora do eixo do carrossel. Mas qual o agente físico que produziu a força centrífuga neste caso? Nada pode ser identificado como responsável! Então a primeira lei está sendo violada neste referencial, assim como a Segunda (a não ser que "forcemos a barra", introduzindo uma força resultante fictícia - a força centrífuga). Por que tudo agora parece diferente e mais complicado? A razão está na rotação do carrossel, que o torna não inercial. Observe que através desta discussão está implícito um segundo referencial, ou seja, *a própria superfície da Terra*, tal que enquanto o carrossel não girar com respeito à superfície terrestre ele é, em virtude da primeira lei ser cumprida, inercial. Portanto, tacitamente, a superfície da Terra considerada um referencial inercial. De fato, para a quase totalidade dos fenômenos do cotidiano, onde sempre estão atuando forças dissipativas de atrito, e mesmo para a maioria dos experimentos científicos realizados até a metade do século passado, a primeira lei é respeitada em referenciais fixos à superfície da Terra, o que os torna inerciais do ponto de vista prático. Mas sabemos que isto não é exatamente verdade, pois a Terra e sua superfície são dotadas de movimento de rotação diurna (sem contar o movimento anual de rotação do centro de massa da terra em torno do Sol, menos importante ainda neste caso). Existem experimentos muito precisos que podem revelar o movimento de rotação da Terra, ao evidenciar que a primeira lei não está sendo "cumprida". O exemplo mais famoso de um experimento deste tipo é o do pêndulo de Foucault (1819-1868), realizado pela primeira vez em 1851,

Assim, vemos que a segunda lei de Newton assume uma forma mais simples quando é utilizada num sistema de coordenadas inercial e, portanto, podemos também dizer que a primeira lei serve precisamente para estipular aqueles referenciais muito especiais onde na segunda lei só comparecerão forças físicas compondo a força resultante. Na realidade, dado que um certo referencial é inercial, então todo e qualquer outro referencial cuja origem se mova com velocidade constante com relação á origem ou outro e que seja destituído de qualquer movimento de rotação com respeito ao primeiro, também será inercial. Por isso dizemos que há infinitos referenciais inerciais dentro dessa classe especial de sistemas de coordenadas. Essa discussão toda parece muito etérea, teórica demais. Não existe um maneira mais prática de decidir se um sistema de referência é ou não inercial? Newton respondeu a essa pergunta definindo um sistema inercial como todo aquele desprovido de aceleração (incluindo rotação) com respeito às "estrelas fixas", uma denominação antiga para o que hoje podemos chamar de matéria distante do universo.

O Princípio da Relatividade de Galileu estabelece essencialmente que as descrições do movimento feitas utilizando-se referenciais inerciais são todas fisicamente equivalentes. Ou seja, as leis da Física (Mecânica) deveriam ser as mesmas para todos os observadores inerciais. A origem da expressão "Relatividade Galileana" remete aos estudos de Galileu sobre o movimento de projéteis. Nesse trabalho, Galileu mostrou que o movimento parabólico de um projétil lançado a partir de uma certa altura do solo com um certo ângulo de lançamento podia ser *derivado* do movimento de um projétil lançado diretamente para cima por um passageiro fixo numa plataforma que se movimenta em M.R.U. com relação à superfície terrestre. Um observador fixo na Terra vê o projétil descrever um movimento parabólico, enquanto o observador que lançou o projétil para cima o vê traçar uma trajetória retilínea de ida e volta. Se um movimento podia ser derivado do outro, então, conclui Galileu, são equivalentes. Mas, para todos os fins práticos, a superfície da Terra e a da plataforma móvel constituem dois referenciais inerciais, de forma que o homem parado na Terra e o passageiro da plataforma móvel são observadores inerciais. As descrições *cinemáticas* que os dois observadores fornecem do movimento do projétil são diferentes, mas as descrições *dinâmicas* são coincidentes: eles medem aceleração nula para o movimento horizontal do projétil ($a_x = 0$), mesma aceleração na direção vertical ($a_y = g \cong 9{,}8\ m/s^2$), mesmo tempo de contato com o piso da plataforma, por exemplo. Apenas em aparência as descrições não coincidem.

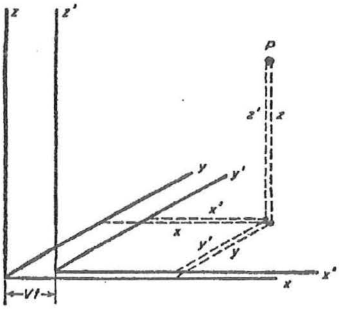
Outra maneira de enunciar o Princípio da Relatividade de Galileu é:

> *"Todos os observadores inerciais são equivalentes e não existe qualquer experimento físico capaz de determinar a velocidade absoluta de um corpo".*

Para entender melhor o que isso quer dizer, retornemos ao exemplo anterior. Considere que o homem fixo na Terra e aquele na plataforma móvel estão dentro de caixas fechadas, sem janelas, de modo que só podem utilizar as paredes de suas caixas como referência, e que o vagão se mova idealmente em M.R.U., sem realmente qualquer tipo perceptível de rotação, curva, sacolejo, etc. Um possível experimento seria os dois observadores atirarem pedras idênticas, de maneira idêntica, diretamente para cima, por exemplo, com a mesma velocidade inicial e a partir de uma mesma altura contada a partir dos pisos de suas caixas. Então, de acordo com a Relatividade Galileana, os experimentos realizados pelos dois observadores terão idênticos resultados em tudo e serão de nenhum proveito para descobrir quem se move ou não com respeito à Terra, quanto mais para descobrir o valor dessa velocidade. E se eles não podem descobri-lo, então também não podem descobrir qual a velocidade absoluta do projétil.

Embora o exemplo acima seja muito particular, não se conhece nenhum fenômeno ou experimento mecânico que viole o Princípio da Relatividade Galileana. E isto não é apenas um fato empírico, mas também uma decorrência teórica das equações que regem o movimento dos corpos materiais, de acordo com a Mecânica Newtoniana (ou Clássica). Expresso em linguagem matemática, as leis da mecânica correspondem a equações, como por exemplo as equações de movimento Newtonianas de uma partícula submetida a um campo de forças conservativo. E em termos dessas equações o Princípio da Relatividade Galileana encontra sua expressão matemática: afim de que a natureza (a Física) tenha o mesmo comportamento quando experimentada ou descrita por diferentes observadores inerciais, é necessário que as equações da física tenham a mesma *forma matemática* em todos os referenciais inerciais, a mesma *estrutura de dependência* entre as grandezas fisicamente relevantes. Embora o valor dessas várias quantidades sejam diferentes quando medidos pelos diferentes observadores inerciais, a relação que existe entre elas, para cada observador inercial, é a mesma, e se mantém quando se troca de sistema de coordenadas. Tecnicamente se diz que as equações da física são invariantes *em forma*, frente a uma transformação de coordenadas entre observadores inerciais. Este tipo de invariância é chamado de *Covariância*.

Mas como são expressas matematicamente as transformações de coordenadas entre observadores inerciais? De acordo com a física clássica essas transformações podem ser facilmente obtidas usando um pouco de geometria e "bom senso". Vamos tomar um caso bem simples, mas que ilustra claramente o que queremos dizer. Tomemos os dois sistemas de coordenadas abaixo como inerciais.



O sistema **S** é utilizado por um observador **O**, enquanto **S'** o é por **O'**. Os dois possuem cronômetros precisos, que são previamente zerados e simultaneamente acionados no exato momento em que os dois observadores se cruzam. Para a física clássica, o tempo é como uma espécie de "rio" invisível, mas sensível, que corre sempre do mesmo jeito para todos, de modo que os cronômetros supostamente estarão sempre sincronizados depois disso, ou seja, o dois cronômetros indicarão os mesmos instantes sempre, $t = t'$, se $t \geq 0$.

Agora considere também o movimento de uma partícula material. Medida pelos dois observadores, a posição instantânea da partícula é fornecida pelas coordenadas (x,y,z) de acordo com **O** no instante t, e pelas coordenadas (x',y',z') de acordo com **O'** no instante $t'= t$. Então é óbvio da figura a validade das relações (*Exercício 1*)

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - ut \\ y' &= y \\ z' &= z \\ (t' &= t) \end{aligned}} \qquad \textbf{(1)}$$

Essas são as equações que relacionam as coordenadas dos dois observadores inerciais para cada instante de tempo de acordo coma física clássica, e o conjunto delas constitui uma Transformação de Galileu (TG). Esta denominação foi dada por Einstein em referência ao exemplo anteriormente mencionado da plataforma móvel, em que a parábola vista por um observador fixo na terra podia ser obtida a partir da trajetória de subida e descida que era vista pelo observador fixo na plataforma quando este lançava diretamente para cima um pedra, desde que se usasse a TG para relacionar as equações de movimento escritas pelos dois observadores (veja o *Exercício 4* mais adiante).

A partir das transformações de coordenadas de Galileu, podemos obter rapidamente as transformações que relacionam os valores da velocidade de uma partícula medidos pelos dois observadores. Uma vez que u = constante, obtemos da TG

$$\Delta x' = \Delta x - u\Delta t$$
$$\Delta y' = \Delta y$$
$$\Delta z' = \Delta z$$
$$(\Delta t' = \Delta t),$$

de modo que, dividindo essas equações por Δt, encontra-se (*Exercício 2*)

$$\boxed{\begin{aligned} V'_x &= V_x - u \\ V'_y &= V_y \\ V'_z &= V_z \end{aligned}} \qquad (2)$$

Analogamente, tomando a variação destas equações e dividindo por Δt, obtemos as transformações entre os valores medidos pelos dois observadores para as componentes da aceleração da partícula (*Exercício 3*)

$$\boxed{\begin{aligned} a'_x &= a_x \\ a'_y &= a_y \\ a'_z &= a_z \end{aligned}}\,. \qquad (3)$$

Ou seja, todos os observadores inerciais medem a mesma aceleração para uma dada partícula cujo movimento é acompanhado. Logo, pela segunda lei de Newton, a força resultante é a mesma para todos os observadores inerciais.

Exercício 4 : mostre explicitamente como obter corretamente a trajetória vista por um dos observadores inerciais no exemplo da plataforma móvel a partir da trajetória descrita pelo outro, relacionando-as através de uma TG. Para tal, convença-se de que o arremessador ***O'*** na plataforma descreve o movimento de subida e descida em linha reta da partícula (supondo que ele esteja na origem do sistema de coordenadas e desprezando a resistência do ar) pelas equações

$$\boxed{\begin{aligned} &x' = o \\ &y' = y'_0 + V'_0 t' - \frac{1}{2} g' t'^2 \end{aligned}}$$

Sendo u = constante a velocidade da plataforma relativa à Terra, então mostre que as correspondentes equações para *O* são

$$\boxed{\begin{aligned} x &= ut \\ y &= y_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

Para descobrir que trajetória é esta em **S**, use a primeira dessa duas equações para expressar t em função de u e de t, e depois substitua na segunda, para obter

$$y = y_0 + \left(\frac{V_0}{u}\right)x - \left(\frac{g}{2u^2}\right)x^2.$$

Finalmente, convença-se de que esta equação representa uma parábola traçada no plano xy, exatamente a trajetória parabólica que *O* enxerga para o projétil lançado de uma certa altura.

Exercício 5 : considere uma partícula em M.R.U.V. sobre o eixo x. Mostre que a equação de Torricelli é covariante frente a uma mudança de coordenadas de Galileu.

O problema do Eletromagnetismo

O grande desenvolvimento conceitual, experimental e teórico (matemático) da Mecânica ocorreu a partir da obra de Newton. O desenvolvimento do Eletromagnetismo foi bem mais tardio. Sua formulação científica acelerou-se com a descoberta por Oersted (1819) de que uma corrente *elétrica* criava um campo *magnético*. Este foi o primeiro fenômeno que revelava a íntima relação entre a Eletricidade e o Magnetismo, partes da Física que até então eram consideradas desconectadas. A partir daí o desenvolvimento do eletromagnetismo foi vertiginoso, com os trabalhos de Ampère, Biot e Savart, Henry, Faraday, e outros. Todo este esforço coletivo resultou na grande sistematização teórico-matemática promovida por James Clerk Maxwell, em meados do século passado. Pode-se dizer que ele é o Newton do Eletromagnetismo. E desempenhando um papel análogo em importância às três leis do movimento de Newton, estavam as quatro equações de Maxwell.

Maxwell foi capaz de obter uma equação de onda para as componentes dos campos elétrico e magnético, partindo de suas quatro equações e supondo não existirem correntes e cargas. Essa é exatamente a situação que temos no espaço livre entre o Sol e a Terra. A equação de onda descrevia, portanto, a propagação de uma onda eletromagnética no vácuo, que se propaga mesmo onde não existe matéria alguma (idealmente, é claro). A equação obtida fornecia automaticamente o valor da velocidade com que esta onda se propagava: era uma velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}997925 \times 10^8 \text{ m/s}, \qquad (4)$$

onde ε_0 e μ_0 são, respectivamente, a constante de permissividade elétrica do vácuo (em unidades do S.I. igual a $8{,}85 \times 10^{-12}$ Farad/metro) e a constante de permeabilidade magnética do vácuo (em unidades do S.I. igual a $1{,}26\times10^{-6}$ Henry/m) . Calculando o valor de c, encontramos um valor igual ao da velocidade com que a luz se move no vácuo (que na época já era conhecida com bastante precisão). Desde as famosas experiências de Young com fendas duplas (1801) já se sabia que a luz era uma onda, pois os experimentos com fendas revelavam a ocorrência de interferência e difração, fenômenos tipicamente ondulatórios. Maxwell, assim, foi levado a concluir que a luz era uma onda eletromagnética. A confirmação experimental da existência das ondas eletromagnéticas preditas teoricamente por Maxwell foi feita por Hertz, em 1887.

Isso tudo acarretava vários problemas. Se a luz era uma onda, como ela poderia se propagar no vácuo? Até então só se conheciam ondas mecânicas, como por exemplo as ondas sonoras, que só se propagavam num meio material e essa visão mecanicista permeava qualquer análise que se fazia de uma teoria física. Imaginou-se, então, que existia um meio invisível chamado "éter luminífero", que permeava o espaço livre e que daria suporte para a propagação de uma onda através de si: a onda seria tão somente uma perturbação em alguma propriedade do éter (qual?), que se propagava a partir de uma região inicial onde fora produzida. Afim de justificar sua indetectabilidade até então, foi preciso atribuir ao éter propriedades físicas incomuns, tais como densidade de massa nula e transparência perfeita (o éter não absorveria nenhuma energia da onda que nele se propagava). As primeiras experiências realizadas com o intuito de detectar fisicamente o éter foram negativas, mas eram ainda inconclusivas dada a precisão que se necessitava dispor para tal. Apenas com a invenção do interferômetro ótico por Albert A. Michelson (1852-1931), em 1881, foi possível dispor da precisão necessária. Ele realizou pela primeira vez uma experiência para revelar a existência do éter neste mesmo ano, tentando medir a velocidade da Terra com respeito ao éter, e depois repetiu-a em 1887 em colaboração com E. W. Morley. Nada foi detectado e o resultado nulo foi amplamente confirmado independentemente por vários outros experimentadores, como pode ser verificado na página 29 da referência [1].

Mas embora a hipótese do éter explicasse de certa forma como uma onda luminosa podia propagar-se no vácuo, ao mesmo tempo criava outro problema quando a onda luminosa era interpretada como sendo uma onda eletromagnética, como queria Maxwell: a equação de onda obtida por ele fornecia automaticamente, como dissemos, o valor da velocidade de propagação da onda, mas exatamente em que referencial inercial este valor era medido? Várias interpretações foram propostas, mas a que parecia mais lógica era que a velocidade c que aparecia na equação de onda fosse a velocidade da luz com respeito ao seu próprio meio de propagação, ou seja, o éter. Isto logicamente implicava que as equações do eletromagnetismo teriam a forma das equações de Maxwell apenas para um observador que estivesse em repouso com relação ao éter. Um outro observador que se movesse com uma certa velocidade u constante com respeito ao éter mediria uma velocidade diferente para a luz. Por exemplo, se este segundo observador inercial estivesse se movendo em direção à fonte de luz ele deveria então medir uma velocidade c+u para a luz. Desta forma existia um sistema de referência preferencial, aquele em repouso com respeito ao éter para o qual as equações de Maxwell eram exatamente válidas e o valor da velocidade da luz no vácuo era exatamente c. Todas as velocidades agora seriam consideradas absolutas - pois podiam ser medidas com relação ao referencial preferencial - e isto violava o Princípio da Relatividade Galileana.

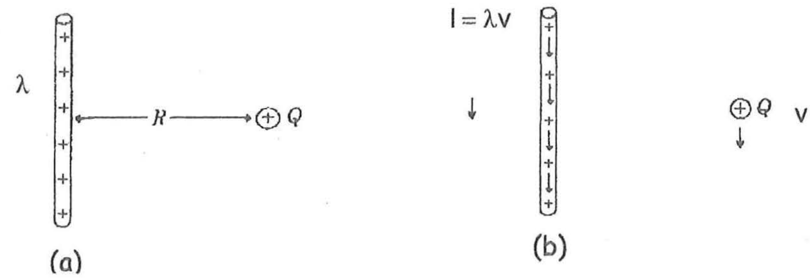
Existe um exemplo bastante simples[2] capaz de ilustrar como o eletromagnetismo de Maxwell viola o Principio da Relatividade Galileana. Considere uma carga puntual +Q num ponto P do espaço, a uma certa distância R de um fio reto, de comprimento infinito, uniformemente carregado em toda sua extensão com cargas positivas, sendo λ = constante a quantidade de carga por unidade de comprimento do fio (a densidade linear de carga). Suponhamos que um referencial fixo em relação ao fio seja inercial (a primeira lei vale para este observador). Considerando que o fio esteja no vácuo (ou no ar mesmo, pois a permeabilidade magnética do ar é muito aproximadamente igual à do vácuo), de acordo com o eletromagnetismo de Maxwell o campo elétrico criado por esta distribuição no ponto P, será de intensidade igual a[3]

$$E(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R},$$

e exercerá uma força *repulsiva* de intensidade

$$F_R = F_E = QE(P) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda Q}{R} \tag{5}$$

sobre a carga Q. Esta será a força resultante sobre Q medida por um observador (inercial) que esteja em repouso com relação ao fio [parte (a) da figura].



Pela Relatividade Galileana esta deveria ser a força resultante medida por qualquer referencial inercial. Considere então um segundo observador inercial que se move paralelamente ao fio, com velocidade relativa u constante [parte (b) da figura anterior]. Para este observador, além da força elétrica existe agora também uma força magnética *atrativa*, pois para ele o fio uniformemente carregado agora constitui uma corrente elétrica contínua de valor (*Exercício 6*) $I = \lambda$ v. O módulo da força magnética sobre a partícula Q (que de acordo com o segundo observador tem uma certa velocidade v) é dado por

$$F_M = QvB,$$

e a intensidade do campo magnético a uma distância R do fio é[3]

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi R},$$

de modo que

$$F_M = \frac{\mu_0 \lambda Q v^2}{2\pi R}. \tag{6}$$

Logo a força resultante para o segundo observador vale (*Exercício 7*)

$$F_R' = F_E - F_B = \frac{\lambda Q}{2\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

[Dica : use as equações **(4)**, **(5)** e **(6)**]. Esta força resultante continua sendo atrativa enquanto a velocidade da partícula for menor que a da luz, anula-se caso v = c e torna-se finalmente repulsiva para v > c. Claro que o fator

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{7}$$

é muito próximo da unidade, mesmo para as maiores velocidades que o homem foi capaz de alcançar em nossa época, como por exemplo a velocidade que se precisa imprimir a um objeto para libertá-lo (mesmo que demorando um tempo muito longo) da atração gravitacional terrestre. Este valor de velocidade é aproximadamente de 40 Km/segundo, tal que o fator numérico **(7)** vale neste caso

$$1 - (\,0{,}000013333\ldots\,)^2 = 0{,}999999999\ldots$$

Na prática, nenhuma diferença seria percebida entre os valores medidos para a resultante pelos dois observadores inerciais do exemplo anterior, a não ser que a precisão dos instrumentos de medida fosse extraordinária. Mas em princípio seria possível detectar tal diferença e com ela se teria como determinar qual dos dois observadores está se movendo com relação ao fio. Portanto, as leis do eletromagnetismo dão resultados dinâmicos diferentes para observadores inerciais diferentes, o que viola a Relatividade Galileana.

Diante disso tudo, havia basicamente três alternativas a escolher:

(1) O Princípio da Relatividade (frente a uma TG) é válido apenas para a Mecânica Clássica, não sendo respeitado pela eletrodinâmica. As equações de Maxwell são válidas apenas num referencial preferencial em repouso com respeito ao éter, para o qual a velocidade de propagação da luz no vácuo é medida como $c \cong 300.000$ Km/segundo;

(2) O Princípio da Relatividade (frente a uma TG) é válido tanto para a Mecânica Clássica como para o Eletromagnetismo, mas as equações de Maxwell precisam ser modificadas, de modo que a velocidade de propagação da luz no vácuo, com respeito à *fonte emissora*, seja igual a c. Tal modificação feita nas equações de Maxwell leva à chamada *Teoria da Emissão.*

(3) O Princípio da Relatividade é válido tanto para a Mecânica como para o Eletromagnetismo, mas as equações das transformações de coordenadas entre referenciais inerciais não são aquelas da TG, mas de um outro tipo de transformação, de tal modo que a velocidade da Luz no vácuo seja igual a c em *todo* referencial inercial. Essas equações de transformação de coordenadas deixariam a forma das equações de Maxwell invariantes, mas não a das equações da Mecânica Newtoniana, de modo que estas precisariam ser modificadas adequadamente.

A terceira alternativa foi a escolhida por Einstein para construir a Teoria da Relatividade *Especial* ou *Restrita* (de validade restrita a observadores inerciais), em 1905. O título do artigo é sugestivo: "Sobre a Eletrodinâmica dos corpos em movimento" [4]. Ou seja, foi uma motivação teórica que deu origem à Teoria da Relatividade Especial. Mais do que explicar resultados experimentais, como os da experiência de Michelson, a grande preocupação de Einstein foi com a propagação da luz como uma onda eletromagnética, descrita matematicamente pelo Eletromagnetismo de Maxwell. "Naquela época acreditava firmemente que as equações da Eletrodinâmica de Maxwell e Lorentz eram corretas. E, além disso, a suposição de que essas equações podiam ser consideradas válidas em qualquer sistema de referência inercial levava ao conceito de invariância da velocidade da luz [no vácuo], o que entretanto contradizia a regra de adição de velocidades usadas na Mecânica" [5]. A "regra de adição de velocidades" a que se refere Einstein é o conjunto das transformações Galileanas para a velocidade, as equações **(2)**. De acordo com ela, se a velocidade da luz no vácuo com respeito a um referencial inercial qualquer é medida como sendo igual a c, então um outro observador inercial deveria medi-la como sendo v+c se estivesse se movendo uniformemente em direção à fonte de luz, ou como v-c, se estivesse se afastando uniformemente da fonte de luz, mas jamais c ! Mais tarde, em 1922[5], Einstein comentou que levou quase um ano tentando resolver esta dificuldade. A solução veio de repente, no meio de uma discussão que tivera com seu amigo, estudante de matemática, Michele Besso: era preciso revisar o conceito de tempo da física clássica. O tempo não poderia mais ser definido de maneira absoluta e existiria uma relação inseparável entre tempo e velocidade. A partir daí, em apenas cinco semanas estava terminado o artigo seminal da Teoria da Relatividade Restrita.

A transformação frente a qual as equações de Maxwell são covariantes é hoje conhecida como *Transformação de Lorentz* (TL). A terminologia faz referência a um de seus descobridores, o físico teórico holandês Hendrik A. Lorentz (1853-1928). Em 1904, Ele mostrou que as equações de Maxwell não são covoriantes frente a uma transformação de coordenadas de Galileu, e que o único conjunto de equações de transformação de coordenadas que preservava a forma de dependência matemática das equações do Eletromagnetismo eram as da transformação que hoje levam seu nome. Elas também foram descobertas no mesmo ano pelo matemático francês Henry Poincarè (1854-1912) e pelo físico inglês Joseph Larmor (1857-1942)[6]. Mas nenhum deles conseguiu perceber seu real significado e alcance, o que só veio à luz com o trabalho de Einstein de 1905. Neste trabalho Einstein simplesmente postulou *que a velocidade de propagação da luz no vácuo era igual a c quando medida por qualquer observador inercial.* Chamaremos este axioma *de Postulado da Invariância da velocidade da luz.*

A Transformação de Lorentz (TL)

As equações da TL podem ser obtidas a partir de dois requisitos[1]:

(1) Que seja válido o postulado da *Invariância da velocidade da luz.* Isso significa que as equações de Maxwell serão covariantes frente à TL e válidas para todos os observadores inerciais (mais tarde o mesmo será exigido das equações da Mecânica e isto exigirá que essas sejam modificadas).

(2) Que a transformação seja compatível com a *Homogeneidade* do espaço e do tempo. Essencialmente, isso significa que todos os pontos do espaço e todos os instantes de tempo são equivalentes. Por exemplo, qualquer ponto do espaço pode ser tomado como origem de um sistema de coordenadas, ou qualquer instante pode ser tomado como o instante inicial de um cronômetro.

Afim de satisfazer este segundo requisito, a transformação buscada deve necessariamente ser *linear*, ou seja, do tipo

$$x' = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14}\,t$$
$$y' = a_{21}\,x + a_{22}\,y + a_{23}\,z + a_{24}\,t$$
$$z' = a_{31}\,x + a_{32}\,y + a_{33}\,z + a_{34}\,t$$
$$t' = a_{41}\,x + a_{42}\,y + a_{43}\,z + a_{44}\,t.$$

(a violação da regra Galileana de adição de velocidades exige que se inclua uma equação de transformação para o tempo também). Se a transformação fosse quadrática, por exemplo, do tipo

$$x' = a_{11}\,x^2,$$

então uma barra de comprimento L = 1 metro medido no referencial S, localizada entre as posições extremas $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ m teria seu comprimento medido em S' como igual a $x'_2 - x'_1 = a_{11}$. Mas se a mesma barra estivesse localizada entre os pontos $x_1 = 2$ m e $x_2 = 3$ m, então seu comprimento medido em S' seria diferente, igual a $5a_{11}$ e, portanto, dependeria do lugar onde a barra é localizada no espaço. Analogamente, se a transformação não fosse linear no tempo, o intervalo entre dois instantes de tempo dependeria do instante em que iniciamos sua medida, o que também viola a homogeneidade do tempo. A mesma coisa para qualquer outro tipo de transformação não linear.

Assim, temos que descobrir o valor de 16 coeficientes a_{ij}. Algumas hipóteses adicionais razoáveis podem ser feitas a respeito deles, como:

(a) que os coeficientes possam ser dependentes da velocidade relativa dos dois observadores (u): $\{a_{11}(u), \ldots, a_{44}(u)\}$

(b) como $u = 0$ significa que as coordenadas usadas pelos dois observadores coincidem, então, neste caso, temos

$$a_{11}(0) = a_{22}(0) = a_{33}(0) = a_{44}(0) \text{ e } a_{ij}(0) = 0 \text{, se } i \neq j.$$

(c) se $v \ll c$ (v muito menor do que c), então as equações da TL devem se reduzir à TG, ou seja, o limite

$$\lim_{u \to 0} a_{ij}(u)$$

deve ser igual à unidade se $i = j$ e deve se anular caso $i \neq j$.

Para tornar as contas mais fáceis, vamos considerar os dois referenciais mostrados na figura 3. Como os eixos x e x' são sempre coincidentes, então pontos com coordenadas $y = z = 0$ (o eixo x) devem ser transformados em pontos com $y' = z' = 0$ (o eixo x'), concluímos que (*Exercício 8*)

$$a_{21} = a_{24} = a_{31} = a_{34} = 0.$$

Analogamente, pontos do plano xy ($z = 0$) devem sempre corresponder a pontos do plano x'y' ($z' = 0$), e pontos do plano xz ($y = 0$) devem ser correspondidos por pontos no plano x'z' ($y' = 0$), de modo que (*Exercício 9*)

$$a_{22} = a_{33} = 1 \quad \text{e} \quad a_{23} = a_{32} = 0.$$

Para obter o primeiro desses dois resultados, deve-se usar argumentos de simetria, tais como "uma barra de certo comprimento quando em repouso num dado referencial inercial S, terá o mesmo comprimento quando também estiver em repouso num outro referencial inercial qualquer".

Restam agora as duas equações

$$x' = a_{11}\,x + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14}\,t$$
$$t' = a_{41}\,x + a_{42}\,y + a_{43}\,z + a_{44}\,t.$$

Mas t' não pode depender de y e de z, senão a homogeneidade do espaço seria violada. Por exemplo, dois relógios idênticos, perfeitos e inicialmente sincronizados discordariam quando observados por O' em pontos do plano yz simetricamente localizados em relação ao eixo x, como em +y e -y, por exemplo ou em +z e -z. Logo (*Exercício 10*)

$$a_{42} = a_{43} = 0.$$

Para o observador O, o plano y'z' (em $x' = 0$ para O') é sempre paralelo ao plano yz, e está localizado a uma distância instantânea deste igual a $x = ut$, de modo que

$$x' = 0 = a_{11}\,u\,t + a_{12}\,y + a_{13}\,z + a_{14}\,t = (a_{11}\,u + a_{14})t + a_{12}\,y + a_{13}\,z,$$

deve valer para *quaisquer* que sejam os valores de y e z. De forma que somos levados a concluir que

$$a_{14} = -u\,a_{11} \quad \text{e} \quad a_{12} = a_{13} = 0.$$

e assim chegamos ao conjunto de equações

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}(x - ut) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= a_{41}x + a_{44}t \end{aligned} \tag{8}$$

Só restam agora três coeficientes para determinar. Vamos usar o postulado da invariância da velocidade da luz no vácuo para todos os observadores inerciais. Considere um pulso de luz, emitido em $t = t' = 0$ a partir da origem $x = 0$, que neste instante coincide com a outra origem, $x' = 0$. O pulso será visto por cada um dos observadores como uma onda esférica de luz propagando-se com velocidade c, *concêntrica à origem de seu próprio sistema de referência.* Isto é uma conseqüência do postulado de invariância da luz. Os dois observadores descrevem matematicamente essas duas esferas nesse instante pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2(t) = c^2 t^2 \tag{9a}$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2(t) = c^2 t'^2 \tag{9b}$$

Usando as equações (8) e a segunda das equações acima, obtemos após alguma manipulação algébrica (*Exercício 11*)

$$\left(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2\right)x^2 + y^2 + z^2 - 2\left(u a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44}\right)xt = \left(c^2 a_{44}^2 - u^2 a_{11}^2\right)t^2.$$

Comparando esta equação com (9a), obtemos

$$\begin{aligned} &\left(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2\right) = 1 \\ &u a_{11}^2 + c^2 a_{41} a_{44} = 0. \\ &c^2 a_{44}^2 - u^2 a_{11}^2 = c^2 \end{aligned}$$

A solução deste sistema de equações simultâneas é (*Exercício 12*)

$$a_{41} = \frac{-u/c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad \text{e} \quad a_{11} = a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

de modo que a Transformação de Lorentz (TL) é o conjunto de equações

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned}} \tag{10}$$

Exercício 13 : Mostre que a TL se reduz à TG quando a velocidade relativa u dos dois observadores é muito menor do que a da luz no vácuo.

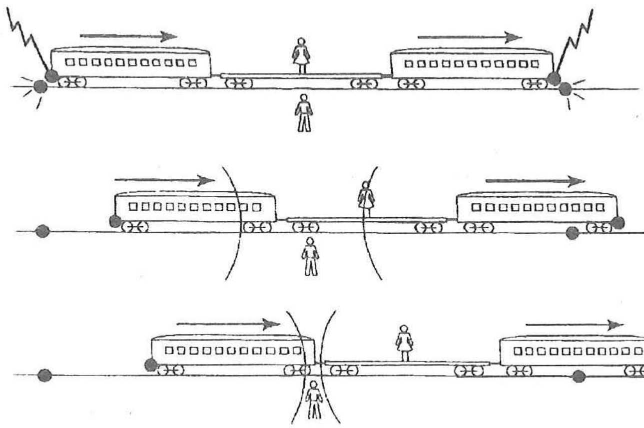
Exercício 14 : Encontre as equações da TL inversa.

Podemos tirar várias conclusões importantes a partir das equações da TL ou, de maneira equivalente, do Postulado da Invariância da velocidade da luz no vácuo. Todas elas violam o chamado "senso comum", aquele conjunto de concepções com base empírica nos fenômenos que experimentamos no nosso cotidiano; no caso que nos interessa aqui, nos fenômenos em que as velocidades relativas dos corpos e dos diferentes observadores do fenômeno são muito pequenas comparadas com a velocidade c da luz no vácuo.

A relatividade da simultaneidade

Dois acontecimentos ou eventos ocorrendo em dois pontos diferentes do espaço são medidos (e não apenas "vistos") como *simultâneos* para um certo observador *O* se forem registrados num mesmo instante de tempo, como medido por relógios *em repouso* no referencial S usado por *O*. Assim, se x_1 e x_2 são as posições dos dois eventos no referencial S fixo no solo, então eles ocorrerão simultaneamente para o observador *O* se $t_1 = t_2$. De acordo com a relatividade de Einstein, tais eventos não serão mais simultâneos para outros observadores inerciais em movimento relativo, de forma que somos levados a concluir que a noção de simultaneidade também é relativa.

Einstein demonstrou a relatividade da simultaneidade com seu famoso paradoxo do trem. Dois centelhadores, localizados nas extremidades de um trem que se move em M.R.U. com grande velocidade em relação à Terra, são ligados, deixando marcas de queimado sobre o piso do trem e também sobre os trilhos.



Um observador *O* fixo nos trilhos, exatamente a meio caminho dos dois centelhadores, recebe os dois pulsos de luz ao mesmo tempo, concluindo daí que as duas centelhas atingiram os trilhos ao mesmo tempo. Para ele, portanto, as duas centelhas são eventos simultâneos. Considere agora um segundo observador *O'* fixo no trem, localizado justamente no ponto central do mesmo. Para facilitar o raciocínio, vamos admitir que *O* e *O'* estão exatamente se cruzando quando as centelhas são produzidas. Este segundo observador, entretanto, recebe os dois pulsos luminosos em instantes diferentes, o que veio da parte frontal do trem primeiro do que o outro, pois este observador move-se de encontro ao pulso que vem do centelhador na parte frontal do trem, ao mesmo tempo em que se afasta do centelhador na traseira. Mas ele pode facilmente comprovar que se encontra eqüidistante das marcas das centelhas no vagão. De acordo com o Princípio da invariância da velocidade da luz, para qualquer que seja o observador inercial, ambos os pulsos se movem com a mesma velocidade c. Logo, *O'* é levado a concluir que a centelha produzida na frente do trem foi emitida primeiro do que a outra e, portanto, as duas centelhas não foram produzidas simultaneamente. Quem está com a razão, *O* ou *O'* ? Embora possa parecer estranho ao bom senso, não existe uma única resposta para esta pergunta. Ambos estão certos ! A simultaneidade é uma noção relativa, não absoluta.

Podemos chegar a este tipo de conclusão também a partir das equações da TL. Sem nenhuma ambigüidade, podemos dizer que as duas centelhas são simultâneas para *O* se este registra os dois pulsos de luz chegando nele no mesmo instante de seu relógio. Neste caso, as posições das duas fontes de luz serão dadas pelas coordenadas $x_1 = L/2$ e $x_2 = -L/2$, tal que $x_1 - x_2 = L$, enquanto $t_1 = t_2$. Já o segundo observador inercial *O'* fixo no trem, de acordo com as transformações de Lorentz, registrará os dois acontecimentos (isto é, detectará a luz emitida por cada das fontes) em instantes de seu tempo dados por ($\beta = u/c$)

$$t_1' = \frac{t_1 - \dfrac{ux_1}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{e} \quad t_2' = \frac{t_2 - \dfrac{ux_2}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

que são diferentes e separados por um intervalo temporal igual a

$$t_2' - t_1' = \frac{uL/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0.$$

Ou seja, os dois acontecimentos não serão mais registrados como simultâneos pelo segundo observador inercial, a não ser que aconteçam no mesmo ponto do espaço ($L = 0$). A razão é que a velocidade de propagação da luz é finita, embora grande para os padrões cotidianos ou mesmo aqueles da ciência. Se a velocidade c fosse infinita, o resultado anterior seria nulo e o segundo observador inercial também registraria os pulsos de luz como simultâneos.

Por outro lado, suponhamos que os dois eventos não sejam simultâneos para o observador *O*, e que o evento 1 ocorreu primeiro de acordo com este observador, de forma que $t_1 > t_2$. Então das equações da TL para t_1' e t_2' obtemos neste caso

$$t_2' - t_1' = \frac{[(t_2 - t_1) - \dfrac{u}{c^2}(x_2 - x_1)]}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Se a quantidade entre colchetes for nula, então os dois eventos serão simultâneos para o observador *O'*; se ela for maior do que zero, então os eventos não serão simultâneos para *O'*, mas ainda serão registrados na mesma seqüência registrada por *O*; e se for negativa, então além de não serem simultâneos também para *O'*, agora os eventos serão registrados na seqüência *invertida*. Isso é possível apenas se

$$x_2 - x_1 > c(t_2 - t_1),$$

o que significa que os dois eventos acontecem em lugares tão distantes um do outro que a luz (ou qualquer outro sinal físico) partindo do evento 1 ainda não poderia ter alcançado o ponto do espaço onde ocorre o evento 2, ou vice versa. Dizemos, então, que os eventos são *causalmente DESconectados*. Caso contrário, haveria tempo para um sinal de luz percorrer a distância entre os ponto onde ocorrem os eventos, e dizemos então que eles são *causalmente COnectados*. Neste caso, a seqüência ou ordem de ocorrência dos dois eventos *não pode* ser invertida. Se um evento 1 é a *causa* de outro evento 2 de acordo com um certo observador, então o evento 1 é registrado num instante de tempo anterior ao do registro do evento 2 por este observador; e a mesma seqüência é registrado por qualquer outro observador inercial, de modo que o princípio da causalidade ("a causa precede o efeito") não é violado.

Exercício 15 .: quanto seria o intervalo $t_2' - t_1'$ do comentário anterior, de acordo com a Transformação de Galileu ?

Estamos tão acostumados a considerar a simultaneidade como absoluta que torna-se muito difícil muitas vezes reconhecer este erro em nosso raciocínio. Freqüentemente, cada aparente paradoxo que se concebe com a intenção de negar a relatividade Einsteniana baseia-se em alguma concepção espontânea acerca da relatividade da simultaneidade.

Refinando o conceito de observador

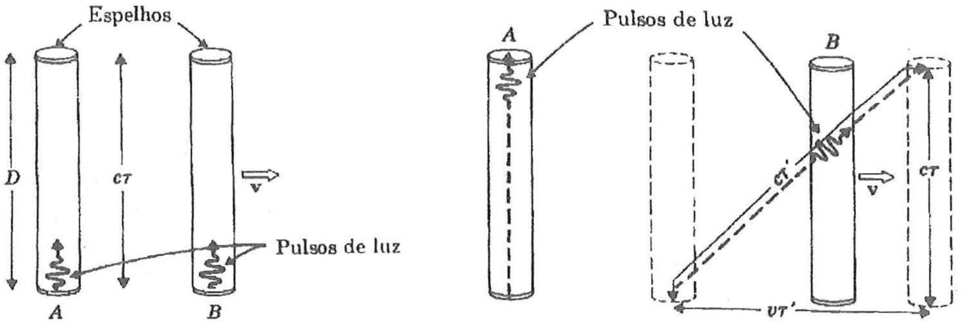
A finitude da velocidade da luz impõe cuidados extras com a definição do que temos até agora chamado de "observador". Não podemos mais concebê-lo simplesmente como uma única pessoa fixada na origem de um sistema de coordenadas e dispondo de um cronômetro preciso. Para que acontecimentos ocorridos em pontos distantes dele possam ter suas posições registradas e seus instantes de ocorrência medidos sem ambigüidade, precisamos dar uma maior precisão a esta noção. A partir de agora, quando falarmos num "observador" em relatividade, estaremos implicitamente nos referindo a um sistema de coordenadas inercial com uma pessoa parada na origem do sistema de coordenadas e com seu próprio cronômetro, que será uma espécie de "observador-mor", ajudado por um número muito grande de "observadores-ajudantes", cada um deles fixo *em cada posição* do eixo x e dotado de seu próprio cronômetro preciso.

Estes relógios são todos identicamente construídos e calibrados, mas antes que possamos utilizá-los é necessário sincronizá-los. Mas não adianta sincronizar os relógios com o relógio usado pelo "observador-mor" na origem quando eles estão todos em repouso relativo com este, e então movê-los para suas posições no sistema de coordenadas, porque não sabemos de antemão se a movimentação dos relógios não afetaria seus andamentos e, então, não podemos supô-lo previamente. Uma maneira de fazer corretamente a sincronização[1] é colocando cada um dos relógios na sua posição definitiva no sistema de coordenadas e depois sincronizá-los por meio de sinais. Por exemplo, considere a sincronização de um certo relógio B, localizado a uma distância L da origem do sistema de coordenadas, ou do observador-mor. Esta distância pode ser medida previamente sem nenhum problema. Combinamos, então, que o relógio na origem do sistema, que chamaremos de A, será acionado no mesmo momento em que um raio de luz é emitido a partir desta posição. Quando este sinal luminoso atingir o relógio B, o observador-auxiliar nesta posição acertará seu relógio para L/c. Este procedimento pode ser realizado para todos os outros relógios auxiliares e, assim, todos ficarão sincronizados corretamente com o relógio A usado pelo observador-mor.

Esse conjunto de "observadores-ajudantes", adequadamente sincronizados com o relógio do observador-mor, é que constitui efetivamente um "observador" em Relatividade Especial. Assim quando dissermos que dois acontecimentos são simultâneos para um dado "observador" queremos dizer mais precisamente: os dois observadores-ajudantes mais próximos dos eventos, usando seus próprios relógios, registraram iguais tempos de ocorrência para os acontecimentos.

Dilatação temporal

O postulado da invariância da velocidade da luz no vácuo implica que o fluxo do tempo depende do estado de movimento relativo do observador. Para ilustrar isto, considere um "relógio de luz", que consiste de um tubo cilíndrico com dois espelhos planos paralelos localizados nas extremidades, a uma distância D um do outro [figura abaixo, parte (a)]. Nos espelhos também existem detetores de radiação (foto-células), com os quais sabemos exatamente quando o pulso atinge cada espelho. Vamos supor ainda que o tubo seja hermeticamente fechado a vácuo, de forma que a velocidade da luz dentro do relógio seja c.



(a) (b)

Um relógio A desses está em repouso no referencial S usado por um certo observador **O**. Seja $\tau = D/c$ o intervalo de tempo gasto para um pulso de luz ir de um espelho ao outro. Cada vez que o pulso atinge um dos espelhos, temos o registro de um "click" do nosso relógio de luz, de forma que τ é uma "régua de tempo". Agora considere um segundo relógio B, idêntico a A em sua construção e funcionamento, que é usado por um segundo observador **O'**, que se move na direção +x com velocidade constante V com respeito a **O** (de forma que, neste caso, u=V). Uma vez que o comprimento do relógio B é transversal à direção do movimento, seu valor medido por **O** será o mesmo do relógio A, igual também ao seu comprimento como medido por **O'** (tanto a relatividade de Einstein como a de Galileu concordam neste ponto). Para **O**, entretanto, a luz agora deve percorrer um caminho diagonal maior do que D, afim de ir de um espelho a outro de B, e como ela o faz com a mesma velocidade escalar c para qualquer observador, segue então que o intervalo de tempo medido por **O** entre dois "clicks" de B será maior do que τ, será, digamos, τ'. Esta é uma conclusão inevitável, se o postulado da invariância da velocidade da luz é admitido como válido. Logo, a partir da parte (b) da figura anterior e usando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$(c\tau')^2 = (c\tau')^2 + (V\tau)^2, \text{ tal que}$$

$$\boxed{\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}}, \qquad \textbf{(11)}$$

onde $\beta = V/c$. Para o observador **O**, a "régua de tempo" do relógio B (o intervalo entre dois "clicks" sucessivos deste relógio) tem um "comprimento" τ' maior do que τ (aquele medido por este mesmo observador para seu próprio relógio A), por um fator $1/\sqrt{1-\beta^2}$. De forma que **O** observa que o relógio B está se atrasando, ou seja, o fluxo do tempo do observador **O'**, medido pelo relógio B, é mais lento quando observado por O. A este fenômeno dá-se o nome de *dilatação temporal*. É claro que a situação é simétrica, de forma que O' chega à mesma conclusão a respeito do fluxo de tempo do observador O (ou seja, do relógio A): cada observador verifica que o relógio do outro está se atrasando.

Exercício 16 : Refaça o cálculo acima de τ' *de acordo com a relatividade Galileana* e mostre que não existe dilatação temporal. Qual é a velocidade escalar do pulso de luz viajando dentro do relógio B, de acordo com o observador O e de acordo coma relatividade Galileana?

Mas poderíamos perguntar: não será que os relógios de luz que consideramos acima comportam-se desta maneira simplesmente por causa da natureza especial da luz? Será que relógios mecânicos, por exemplo, cujas partes materiais movem-se com velocidades muito menores do que a da luz, também se tornariam mais vagarosos quando observados por um observador em relação ao qual ele está se movendo? Ou poderíamos perguntar se também aqueles processos químicos e biológicos que constituem o metabolismo de um ser vivo, por exemplo, ficariam mais vagarosos pelo mesmo fator $1/\sqrt{1-\beta^2}$? Einstein respondeu que o tempo "verdadeiro e matemático" (na expressão de Newton), objetivo, é o que é medido por um relógio de qualquer natureza, desde que esteja corretamente calibrado. A dilatação temporal é uma propriedade intrínseca do tempo, não do particular tipo de relógio usado. Einstein argumenta que se um relógio mecânico se comportasse diferentemente de um relógio de luz, então o Princípio da Relatividade seria violado, pois desta forma teríamos como detectar ou medir o movimento absoluto comparando o fluxo do tempo como medido por um relógio de luz e um outro mecânico: sempre que os dois relógios concordassem, estaríamos em repouso (absoluto); e sempre que discordassem, estaríamos em movimento (absoluto).

Exercício 17 : demonstre a dilatação temporal [equação (11)] diretamente a partir das equações da TL.

Existem comprovações experimentais da dilatação temporal ? Sim, várias, mas aqui iremos comentar apenas a mais famosa delas. Trata-se, em realidade, de uma verificação indireta. Uma variedade de partículas subatômicas instáveis chamadas de *mésons* π, ou *píons*, decaem espontaneamente numa partícula elementar mais estável chamada de *múon* e num neutrino, uma partícula sem carga e massa nula. Num certo instante tomado como inicial, o número de mésons numa amostra é N_0. Então, sabe-se experimentalmente, o número N(t) de mésons π que ainda *não decaíram* num certo instante t posterior ao inicial é uma fração do número inicial dessas partículas no instante inicial, dada por

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau), \tag{12}$$

onde $\tau = 2{,}6 \times 10^{-8}$ segundos é chamada de "vida média" da partícula. Portanto, depois de apenas $2{,}6 \times 10^{-8}$ segundos cerca de $1/e \cong 0{,}37$ ou 37% dos N_0 píons na amostra ainda não decaíram. Esta conclusão é tirada usando-se um sistema de coordenadas *S'* em que os píons estejam em repouso. Em relatividade especial, costuma-se denominar de *referencial próprio* ao referencial no qual o corpo em observação se encontra em repouso relativo. Então os mésons π têm "vida curta" em seu referencial próprio. Agora, pode-se produzir feixes de píons bombardeando-se um alvo sólido dentro de um acelerador de partículas, usando-se prótons de alta energia (cinética) como projéteis. Com colisões tão violentas como essas dos prótons com núcleos atômicos do material sólido, os mésons do feixe emergente deixam o material do alvo com uma velocidade relativa muito próxima de c, tipo 0,99999c ou maior, com respeito ao sistema de coordenadas S fixo no laboratório (LAB). Dessa maneira, em média e de acordo com a mecânica clássica, cada píon deveria percorrer uma distância média de aproximadamente 8 metros antes de decair num múon e num neutrino, de modo que muito poucos mésons chegariam a atingir um detetor colocado a uma distância muito maior do que essa. Mas o que um observador fixo no LAB verifica é que os mésons π relativísticos do feixe sobrevivem por um tempo muito maior, pois os detetores usados no LAB recebem uma fração de mésons π não decaídos muito maior do que aquela que é predita da equação (12), usando-se a vida média determinada no sistema de coordenadas *próprio* do méson. De acordo com a equação (11) ou seja, de acordo com a relatividade especial, a vida média do píon medida pelo observador fixo no LAB é aumentada por um fator $(1-\beta^2)^{-1/2}$, de maneira que os píons neste caso percorrem em média distâncias até 100 vezes maiores do que aquelas preditas pela mecânica Newtoniana, antes de decaírem! Este resultado foi testado inúmeras vezes, nos mais diversos laboratórios do mundo e por equipes de pesquisadores independentes, ao longo de algumas décadas e utilizando feixes de diferentes tipos de partículas instáveis, não apenas mésons π. Os resultados são todos iguais, revelando que de fato a vida média das partículas velozes do feixe é muito maior do que aquela que é medida quando essas partículas estão em repouso (ou com velocidades não relativísticas em respeito ao LAB).

Transformação de Lorentz para velocidades: combinação de velocidades relativísticas

Das equações da TL, obtemos as variações

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z \quad \text{e} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - u\Delta x / c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Dividindo-as por $\Delta t'$, obtemos após alguma manipulação algébrica (*Exercício 18*)

$$\boxed{\begin{aligned} V_x' &= \frac{V_x - u}{1 - \frac{uV_x}{c^2}} \\ V_y' &= \frac{V_y}{1 - \frac{uV_x}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2} \\ V_z' &= \frac{V_z}{1 - \frac{uV_x}{c^2}}\sqrt{1-\beta^2} \end{aligned}} \qquad \textbf{(13)}$$

Essas são as equações da TL para as componentes da velocidade de um corpo qualquer. Na literatura científica, essas equações são freqüentemente referidas como "regras de adição de velocidades relativísticas", mas achamos mais apropriado a denominação regras de *combinação* de velocidades relativísticas. Compare-as, por exemplo, com as correspondentes equações da Relatividade Galileana, as equações (2).

Para ilustrar o uso das equações (13), considere uma partícula se movimentando na direção -x com velocidade $V_x = -0{,}9\,c$ medida por um certo observador inercial **O**. Se um segundo observador inercial estiver se movimentando com respeito a **O**, na direção +x, com uma velocidade $u = 0{,}9\,c$, qual será a velocidade que o segundo observador registrará para essa partícula? De acordo com a relatividade Galileana, seria de valor

$$V_x' = V_x - u = -0{,}9c - 0{,}9c = -1{,}8c\,,$$

que é maior em módulo do que a velocidade da luz no vácuo; mas de acordo com a Relatividade Restrita, será de valor igual a

$$V_x' = \frac{V_x - u}{1 - \frac{uV_x}{c^2}} = \frac{-0{,}9c - 0{,}9c}{1 - \frac{(0{,}9c)(-0{,}9c)}{c^2}} = -0{,}9945c\,,$$

que não ultrapassa o valor da velocidade da luz no vácuo. E se $u = c$ e $V_x = -c$, obtemos $V_x' = c$! Ou seja, nenhum observador inercial consegue medir uma velocidade maior do que a da luz no vácuo para qualquer entidade física, não importa quão rápido se mova em relação a qualquer outro referencial inercial e quão rápido este se mova com respeito a qualquer outro referencial inercial. Desta maneira, de acordo com a relatividade especial, *a velocidade da luz no vácuo constitui um limite máximo para as velocidades de entidades físicas.*

Exercício 19: demonstre que, de acordo com a TL para velocidades, a luz se propaga no vácuo com velocidade escalar c, qualquer que seja o sistema de coordenadas utilizado pelo observador.

Contração de Lorentz-FritzGerald

Outra conseqüência da relatividade da simultaneidade refere-se a medidas do comprimento de um corpo, num referencial em que este esteja em movimento. Tomemos uma barra como o corpo em movimento, por exemplo. Seja L_o o comprimento da barra medido no referencial próprio dela, aquele em que ela se encontra em repouso. Este comprimento será sugestivamente denominado de *comprimento próprio*. A questão que nos interessa agora é: como medir, sem ambigüidades, o comprimento desta barra num outro referencial S, com respeito ao qual ela esteja se movendo com velocidade relativa constante u ? A maneira de realizar isso sem ambigüidades, é determinar *simultaneamente* as posições das duas extremidades da barra neste sistema de coordenadas. Seu comprimento, então, será dado pela diferença entre as coordenadas dessas duas posições no referencial S. Entretanto, sendo relativa a simultaneidade, as medidas do comprimento da barra dependerão do sistema de coordenadas usado e serão, portanto, também relativas. Observadores diferentes medirão comprimentos diferentes para a barra.

Podemos usar as equações da TL para obter a relação entre os comprimentos de uma barra como medidos por dois observadores inerciais diferentes. Suponha que a barra esteja se movendo longitudinalmente ao longo do eixo +x de um certo referencial inercial S (o LAB), com velocidade relativa constante u. O referencial S', também se movendo na direção +x com velocidade relativa a S constante e igual a u, constitui o referencial próprio da barra. Num certo instante t, as coordenadas das extremidades da barra são determinadas em S simultaneamente como iguais a x_1 e x_2, tal que seu comprimento L naquele referencial é $L = x_2 - x_1$. Das equações da TL obtemos as coordenadas das extremidades da barra medidas no referencial próprio da barra,

$$x_1' = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad e \quad x_2' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

tal que seu comprimento próprio L_o medido em *S'* é igual a

$$L_o = x_2' - x_1' = \frac{L}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

ou seja,

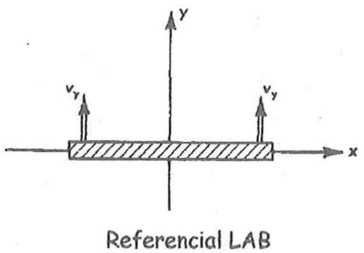
$$\boxed{L = L_o\sqrt{1-\beta^2}},$$

tal que $L < L_o$. Este resultado é conhecido como contração de Lorentz-FritzGerald, em homenagem aos dois físicos que na segunda metade do século passado propuseram-na para explicar o resultado *negativo* do experimento que Michelson-Morley realizaram para detectar o movimento da Terra em relação ao suposto éter luminífero, antes mesmo da descoberta por Einstein da teoria da relatividade restrita.

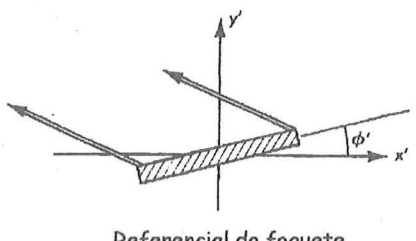
Exercício 20 [7] : uma partícula move-se com velocidade constante $V_y' = \Delta y'/\Delta t'$ ao longo de eixo y' no referencial *S'* de um foguete que se desloca com velocidade constante u em relação ao referencial S fixo na Terra, o qual denominaremos de referencial-laboratório (LAB). Suponha que o foguete esteja se movendo na direção +x. Mostre que, no referencial LAB, o foguete se move com velocidade dada por

$$V_x = u$$
$$V_y = V_y'\sqrt{1-\beta^2}$$

Exercício 21 [7]: Um bastão mantém-se paralelo ao eixo x, enquanto se move na direção +y do referencial LAB, com velocidade paralela ao eixo y, $V_y > 0$ (lado esquerdo da figura abaixo).



Referencial LAB



Referencial do foguete

Mostre que, em relação ao referencial do foguete do exercício anterior, a barra: (a) move-se como mostrado no lado direito da figura acima, determinando sua velocidade com respeito ao foguete, bem como o ângulo θ' (não mostrado na figura) formado entre a direção de sua velocidade em *S'* e o semi eixo +x'; (b) que sua orientação está inclinada de um certo ângulo ϕ' com respeito ao eixo x' do foguete, igual a

$$\phi' = \text{arc tg}\left(\frac{uV_y}{c^2\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Aparência visual de objetos em movimento relativístico.

Em relatividade restrita, "observar" não é a mesma coisa que "ver". Portanto, é de se esperar que a *aparência visual* de corpos em movimento relativístico (o que está diretamente relacionado com o ato de "ver") não será necessariamente igual ao que é medido. "Ver" significa que as luzes emitidas pelas diferentes partes de um corpo em movimento alcançaram simultaneamente a retina de nosso olho. Neste sentido, "ver" é a mesma coisa que "fotografar". Quando dizemos que "vimos" ou "fotografamos" um certo corpo se movendo, estamos nos referindo a uma pessoa apenas ou a uma única máquina fotográfica. Mas quando dizemos que o corpo em movimento foi "observado" num dado referencial, isso implicitamente significa que uma infinidade de pessoas e relógios estão envolvidos no ato.

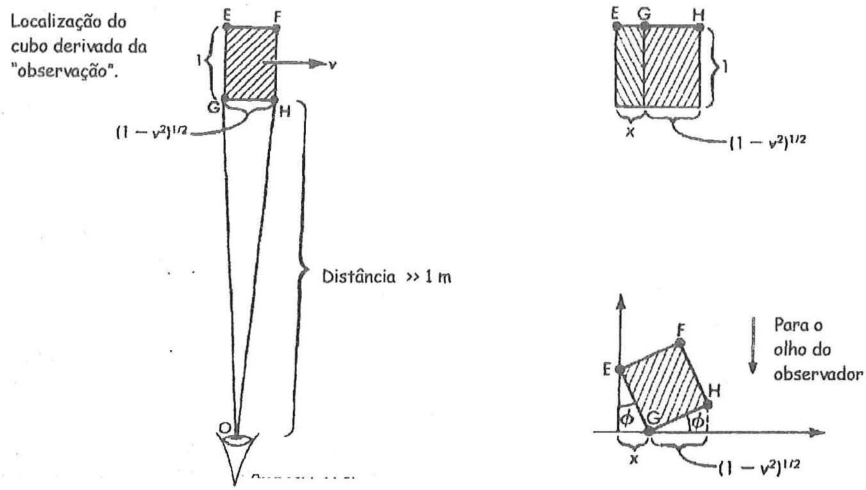
Para esclarecer melhor o que queremos dizer com isso, imagine que o corpo de interesse seja uma barra. Por simplicidade, vamos admitir que ela esteja movendo-se longitudinalmente na direção x. Afim de "observar" o comprimento da barra num dado instante, uma infinidade de observadores auxiliares são posicionados em todos os lugares ao longo do eixo x, cada qual dotado de um cronômetro preciso, idêntico aos dos demais auxiliares e previamente sincronizado com eles. Também conhecemos as coordenadas de cada um desses auxiliares ao longo do movimento. Então pedimos a todos eles que usem seus olhos para verificar *se ou não* uma das extremidades da barra está coincidindo consigo na coordenada x naquele instante combinado. É claro que apenas dois auxiliares registrarão "sim". O comprimento da barra será, então, igual à distância conhecida entre os dois auxiliares que responderam "sim". Portanto, os olhos de um número infinito de pessoas foram envolvidos numa única "observação" como essa.

Note que é desprezível o tempo gasto para a luz emitida por qualquer das extremidades da barra alcançar o olho do auxiliar mais próximo naquele instante, por causa da grande velocidade com a qual a luz se desloca, de forma que podemos afirmar que os raios de luz registradas pelos olhos dos dois auxiliares que responderam "sim" *foram simultaneamente emitidas* pelas duas extremidades da barra. Mas quando alguém "vê" ou "fotografa" o objeto em movimento, não é isso o que acontece. Raios de luz *registrados simultaneamente* na retina ou no filme e que correspondem a partes diferentes da imagem foram *emitidos não simultaneamente*! Partes diferentes *da imagem* foram formadas por raios de luz que gastaram tempos diferentes para alcançarem simultaneamente a retina ou o filme; de forma que, no instante em que simultaneamente alcançaram a retina ou o filme, a correspondente parte *do objeto* estava já numa posição diferente daquela que ficou registrada na imagem. Se a velocidade relativa do objeto for relativística, o que ficará registrado na fotografia, por exemplo, será bastante diferente do que é "observado" no mesmo instante em que a foto é tirada.

Considere, por exemplo[8], um cubo de aresta L movendo-se em translação pura (sem rotação) na direção +x de um certo sistema de coordenadas inercial, com uma velocidade constante v comparável à velocidade da luz no vácuo. Suponha que uma das faces do cubo permanece paralela ao eixo x. Seja $t = 0$ o instante em que o ponto central desta face está na posição $x = 0$, e que neste instante o auxiliar ali localizado tire uma fotografia do cubo, enquanto que o conjunto infinito de auxiliares trata de "observar" a posição instantânea do cubo. O que se "observará" é que a aresta do cubo paralela ao movimento está contraída por um fator $(1-v^2/c^2)^{1/2}$ (contração de Lorentz-FritzGerald), embora a fotografia vá "mostrar" o cubo não como deformado ou achatado, mas como estando *rotado* através de um ângulo

$$\phi = \arccos (v/c),$$

em torno de um eixo perpendicular à direção do movimento, como ilustrado na figura abaixo.



Canto superior direito: imagem registrada pela retina ou fotografia. **Canto inferior direito:** como o observador visual interpreta o que ele vê ou fotografa. A figura ilustra o que seria uma vista de cima da imagem mental que ele forma a partir dessa interpretação.

Se substituíssemos o cubo por uma esfera monocromática e sem marcas de espécie alguma, não notaríamos nada de anormal na imagem fotográfica da esfera, nem achatamento nem rotação! Mas a "observação" realizada revelaria indubitavelmente que a bola está achatada na direção do movimento.

O que é o mesmo em diferentes referenciais?[7]

Nem tudo é relativo na teoria da relatividade de Einstein. Há coisas absolutas, que independem do referencial inercial usado. Por exemplo:

(a) As *Leis* da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, embora relacionando quantidades cujos valores numéricos dependem do referencial escolhido. E isso é considerado válido não apenas para as leis da Mecânica, mas para o Eletromagnetismo e as demais áreas da Física.

(b) As leis da Física são enunciadas matematicamente em termos de *constantes fundamentais* da natureza, como a carga do elétron, a constante geral da gravitação Newtoniana, etc. Elas não podem ser dependentes do referencial inercial escolhido, sob pena do Princípio da relatividade ser violado, pois o comportamento matemático das quantidades descritas nessas equações pode mudar radicalmente dependendo do valor assumido pelas constantes fundamentais.

(c) A velocidade da "luz" (onda eletromagnética) no vácuo é uma *quantidade absoluta*, sendo medida como c = 299.792.458 metros/segundo por todos os observadores inerciais.

Qual o suporte empírico para essas assertivas? Na verdade há, existem muitos experimentos já realizados de maneira cuidadosa que corroboram (a), (b) e (c), mas todas limitadas a referenciais que se movem com certa velocidade constante com respeito à Terra, ou ao Sol. Por outro lado, nesses mesmos referenciais, não se conhece nenhum fato experimental relevante que invalide o Princípio da relatividade, permitindo que se distinga um particular referencial inercial dos demais.

(d) Como veremos mais adiante, Minkowiski (que havia sido professor de Einstein em Zurich) descobriu em 1908 que existe uma *estrutura geométrica* subjacente à teoria criada por Einstein, invariante sob uma TL e independente de referencial (inercial), portanto absoluta, conhecida como *Espaço de Minkowski* ou *Espaço-tempo.*

Exercício 22 : De acordo com o Princípio da relatividade, quais das quantidades seguintes devem necessariamente ser medidas como idênticas por todos os referenciais inerciais:

(a) A velocidade de um elétron;
(b) A energia cinética de um próton;
(c) O tempo entre dois eventos;
(d) A ordem dos elementos na Tabela Periódica;
(e) A Primeira Lei de Newton;

Paradoxos

A má interpretação da relatividade restrita ou a má utilização das equações da TL levam muitas vezes a conclusões paradoxais. Vamos examinar alguns casos mais populares.

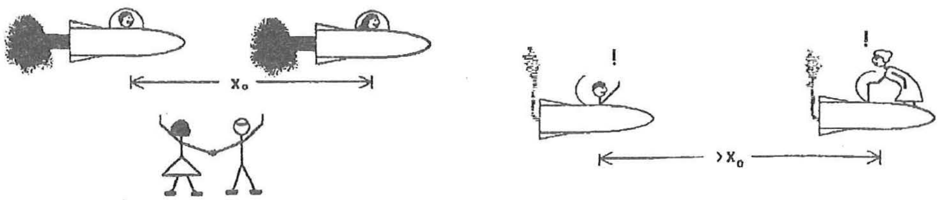
O paradoxo dos gêmeos

Este é um dos paradoxos mais famosos envolvendo a relatividade especial e um dos mais fáceis de resolver. Dois irmãos gêmeos separam-se quando a idade dos dois é, digamos, 20 anos. O gêmeo A fica na Terra levando sua vida normal, enquanto o gêmeo B toma um foguete que se dirige a uma estrela distante da Terra 20 anos-luz, com velocidade constante relativística u=0,99c relativamente à Terra ($\beta = 0{,}99$). Chegando à estrela, ele imediatamente inverte sua direção em 180 graus e retorna à Terra com a mesma velocidade escalar da viagem de ida. Portanto, o tempo transcorrido na Terra durante toda a viagem é de 40,4 anos terrestres. De acordo com o gêmeo A, o tempo medido pelos relógios no foguete está fluindo mais devagar por um fator igual a $(1\text{-}0{,}99^2)^{-1/2}$ = 0,14, de modo que a idade do gêmeo B ao retornar é apenas 5,6 anos aproximadamente maior do que na partida, ou seja, 25,6 anos, enquanto a própria idade de A é 60,4 anos e este estará biologicamente bem mais velho do que B.

O paradoxo surge quando se considera a mesma situação como observada a partir do ponto de vista do gêmeo B, ou seja, usando-se o sistema de referência fixo no foguete, e seus relógios. À primeira vista, assumindo que os dois referenciais utilizados pelos gêmeos sejam equivalentes, a situação deveria se inverter quando observada pelo gêmeo B: o outro irmão é que deveria estar mais novo. Afinal de contas, do ponto de vista do referencial do foguete, é a Terra que se afasta e depois se aproxima do foguete com v = 0,99c. Porém um fato muito importante está sendo deixado de fora nesta análise apressada: enquanto o referencial fixo na

Terra é (aproximadamente) inercial - a aceleração da Terra com respeito às estrelas fixas é muito pequena - o referencial do foguete não é inercial de jeito nenhum, pois o foguete necessariamente deve se acelerar violentamente com respeito às estrelas fixas, afim de retornar à Terra. Portanto, a situação não tem porque ser encarada como simétrica. Apenas a análise feita a partir do que é observado pelo gêmeo A é que é compatível com a relatividade restrita de Einstein e o paradoxo não existe.

Uma variação deste paradoxo é o assim chamado "paradoxo dos gêmeos identicamente acelerados" [9]. Suponha dois gêmeos, Maria e João, cada qual com seu próprio foguete. Os dois foguetes são idênticos em construção, recebem a mesma quantidade inicial de combustível e são posicionados em repouso com respeito à Terra a uma certa distância x_0 um do outro. Os gêmeos sincronizam seus relógios e, no mesmo instante, ligam seus motores e adquirem a mesma aceleração com respeito à Terra, para a direita, como mostra o lado esquerdo da figura a seguir.



Depois que ambas as naves esgotam seu combustível (lado direito da figura) elas estarão com a mesma velocidade relativamente à Terra e situados a uma mesma distância um do outro (a mesma distância inicial x_0), ou seja, compartilharão do mesmo referencial inercial. Como tudo é aparentemente idêntico para os dois gêmeos, espera-se que ao final da parte acelerada do movimento eles tenham envelhecido de forma idêntica. Mas o que eles verificam estupefatos é que Maria envelheceu mais do que João ! Nisso consiste o paradoxo.

Tal conclusão pode ser derivada a partir das equações da TL e do que seus pais na Terra observam. Estes concordam em que os relógios dos dois gêmeos permanecem o tempo todo sincronizados e, portanto, as idades dos gêmeos permanecem iguais ao longo da jornada. Os pais também concordam que, sendo os dois foguetes igualmente acelerados durante o mesmo intervalo de tempo, a distância entre os dois foguetes sempre será igual à inicial, mesmo durante o período de aceleração. Suponha para facilitar o raciocínio que o instante de desligamento dos motores dos foguetes, quando os dois gêmeos finalmente alcançam o referencial inercial definitivo comum, ocorra precisamente na data de aniversário dos dois (estaremos medindo o tempo aqui em dias). Vamos agora escrever as equações da TL que relacionam os instantes t dos eventos como registrados no referencial dos pais (a Terra) com os instantes t' dos relógios do referencial (comum) dos dois foguetes :

$$t'_J = \frac{t_J - vx_J / c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \text{e} \quad t'_M = \frac{t_M - vx_M / c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

onde os sub índices "M" e "J" se referem, respectivamente, a Maria e João e v é a velocidade final alcançada pelos dois foguetes com respeito à Terra (note que embora os foguetes sejam referenciais *não inerciais*, podemos sempre, em cada instante de tempo, encontrar um referencial *inercial* no qual os dois foguetes estejam instantaneamente em repouso; este será o referencial inercial próprio *instantâneo* dos foguetes, para o qual podemos usar a relatividade restrita). Como $t_M = t_J$ (para os pais os aniversários ocorrem simultaneamente, pois os foguetes foram identicamente acelerados) e $x_M - x_J = x_0$, então subtraindo as duas equações, obtemos

$$t'_M - t'_J = \frac{vx_0}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

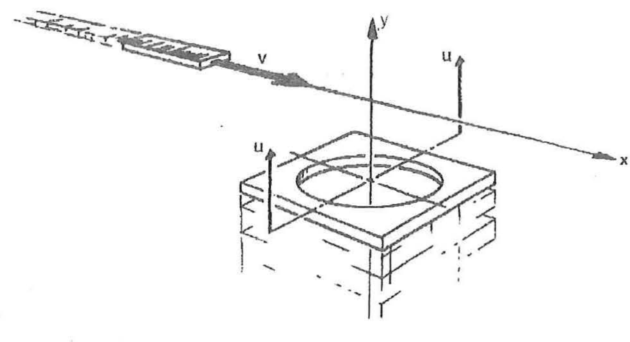
Portanto, de acordo com os gêmeos, o aniversário de Maria ocorre antes do de João e conseqüentemente ela está mais velha ao final da jornada acelerada. Porém tudo isso parece paradoxal. Afinal, os dois gêmeos foram igualmente acelerados, pelo mesmo intervalo de tempo. Então "se espera" (senso comum) que eles envelheçam de maneira idêntica!

Mas é claro que não existe paradoxo algum, pois as situações dos gêmeos não são *exatamente* iguais: Maria começou sua jornada acelerada de uma posição que estava x_0 metros á frente de João, se o eixo x está orientado no sentido da aceleração subseqüente. Se eles tivessem acelerado seus foguetes no sentido contrário, seria João que teria envelhecido mais ao final da jornada. As situações dos gêmeos ao longo da jornada seriam exatamente as mesmas se os foguetes tivessem sido acelerados numa direção perpendicular ao eixo x, por exemplo, e neste caso sim, os gêmeos teriam envelhecido identicamente. Ou no caso de os dois foguetes se acelerarem em sentidos contrários, partindo de um mesmo local com o mesmo valor de aceleração constante. Neste caso as situações dos gêmeos são realmente simétricas. e ao final da jornada acelerada eles devem ter envelhecido igualmente.

Note também que poderíamos ter posicionado os dois gêmeos *num mesmo foguete* relativístico, com Maria x_0 metros mais próxima da frente da nave do que João. Tal situação é equivalente em tudo à versão anterior, com um dos gêmeos em cada foguete (mesma aceleração para os dois, mesmo tempo de regime acelerado do foguete, etc). Aquela pessoa que se encontra "mais atrás" no foguete envelhece mais lentamente, na caso do exemplo, o João. Mas, de acordo com o *Princípio da Equivalência,* dentro de um foguete uniformemente acelerado como esse tudo se passa como se o foguete não estivesse acelerado, mas existisse ao invés um *campo gravitacional* uniforme atuando na direção longitudinal do foguete, no sentido que vai da parte frontal do mesmo para a traseira. Então, se é assim, isso significa que relógios posicionados a alturas diferentes num campo gravitacional uniforme não permanecerão sincronizados e o fluxo do tempo não será uniforme ao longo da direção vertical: relógios em posições mais baixas andam mais devagar. Tal conclusão também é obtida da Teoria da Relatividade Geral, proposta por Einstein em 1915 para reformular a teoria da gravitação.

O paradoxo do skate e da grade

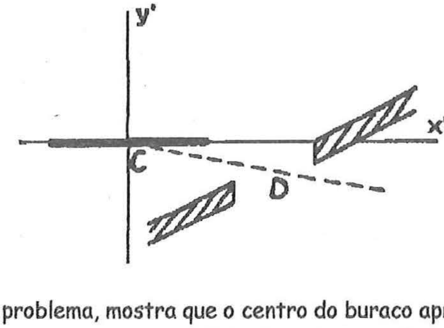
Suponha que uma barra, cujo comprimento medido em repouso com respeito à Terra é 10 metros, mova-se paralelamente ao eixo x do sistema de referência S fixo na Terra, com uma velocidade constante v [10]. Ao mesmo tempo, um tampo de mesa plano e de espessura desprezível, com superfície paralela ao eixo x e diâmetro próprio igual também a 10 metros, move-se com velocidade constante u com respeito à Terra no sentido positivo do eixo y (veja a figura seguinte). Suponha também que os relógios do sistema S tenham sido sincronizados de maneira que o centro da barra coincida exatamente com o centro do buraco no instante t = 0 (no sistema S). Isto não é essencial na análise, apenas torna mais fácil o raciocínio.



Se v é comparável a c, então o comprimento da barra medido em S será menor do que 10 metros e deverá passar através do tampo. Considere agora um outro referencial inercial S´ com eixos x´, y´ e z´ paralelos aos respectivos eixos de S, fixo a um foguete que se move de forma que a barra esteja em repouso relativo. Com respeito a este referencial, a projeção do buraco no tampo sobre o eixo x´ será menor do que 10 metros e à primeira vista parece difícil entender como a barra poderá passar através do buraco. Nisto consiste o paradoxo. Porém de acordo com o resultado do *Exercício 21*, tanto a barra como o tampo não serão mais observados como sendo paralelos um ao outro, mas como inclinados de um ângulo ϕ' com respeito ao eixo +x', cuja tangente é dada por

$$\mathrm{tg}\ \phi' = \frac{uv}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Desta forma não existe paradoxo algum, pois os observadores que utilizam o sistema de coordenadas S' também registrarão a barra passando através do buraco, como registrado pelo outro observador que utiliza o referencial S.

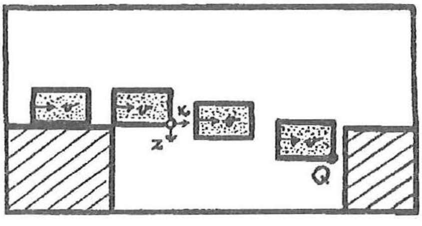


Uma análise mais detalhada do problema, mostra que o centro do buraco aproxima-se do centro da barra ao longo de uma direção da linha reta (a linha tracejada na figura anterior) definida pela equação

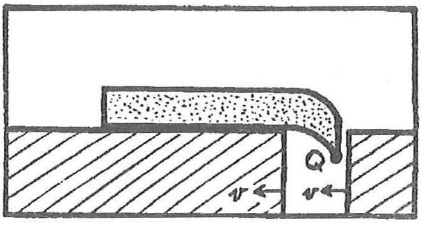
$$y' = -\frac{uv\sqrt{1-(v/c)^2}}{c^2}.$$

Uma versão mais complicada [11] deste tipo de paradoxo é a seguinte. Um caixote está se deslocando com velocidade relativística em relação ao solo. À sua frente existe um buraco cuja largura, medida num referencial fixo na Terra, é exatamente igual ao comprimento próprio do caixote. Devido à velocidade comparável à da luz do caixote, entretanto, seu comprimento medido por um observador O fixo no solo está contraído e, assim, para este observador o caixote deverá cair no buraco. Mas para um observador O' que se move junto com o caixote e a seu lado, o comprimento do caixote é o usual, não contraído, enquanto é o buraco que apresenta contração na sua largura, de modo que ele *não* deve cair no buraco. Qual dos dois observadores está correto? Aparentemente ambos estão corretos, ou errados! O que muda nesta versão do paradoxo em relação à anterior, é que agora o corpo de interesse (o caixote) tem uma aceleração, devido à ação da gravidade terrestre. A resolução do paradoxo repousa no reconhecimento de que a noção de *rigidez* é também relativa. Ou seja, no fato de que um corpo *acelerado* que é observado como sendo retilíneo em um certo referencial inercial S (fixo na Terra) será *observado* como sendo curvo em outro referencial inercial S' (aquele em que o caixote está momentaneamente em repouso). Para evitar complicações desnecessárias, suponha que existe uma espécie de "tampa-armadilha" cobrindo o buraco, capaz de sustentar o peso do caixote, a qual deverá ser puxada para baixo no exato momento em que a extremidade *traseira* do caixote chegar nela. Se a tampa-armadilha é puxada com uma aceleração maior do que a da gravidade, o caixote poderá cair no buraco mantendo-se na horizontal, não inclinando sua frente para baixo, como registrado por um observador fixo na Terra (lado esquerdo da figura seguinte).

Não há dúvida de que a descrição dada por O está correta, uma vez que este é um referencial inercial, enquanto que O' caindo junto com o caixote é um referencial não inercial. O caixote simplesmente não poderá permanecer rígido no referencial S' utilizado por O'. Pode-se mostrar[11] que existe um ponto especial Q após o qual o caixote como que "fluirá parabolicamente" para baixo, como se não fosse rígido, o que está ilustrado no lado direito da figura a seguir. Portanto a noção de rigidez, ou de "corpo rígido", é também relativa, e a origem do paradoxo consiste em tomar tal noção como absoluta.



(a)



(b)

(a) Seqüência de quatro observações feitas por O em intervalos de tempos iguais. (b) Observação feita por O' em um particular instante de tempo t'. Por conveniência estes diagramas foram desenhados para o caso $(1-\beta^2)^{1/2} = 0{,}25$.

Momentum Linear Relativístico

Após ter obtido de maneira independente as equações da TL, em 1905, Einstein se voltou para o problema da dinâmica relativística. Seu ponto de partida foi o *Princípio da conservação do momentum linear* para um sistema sobre o qual a força *externa* resultante é nula. Este princípio é sempre válido em qualquer tipo de colisão entre partículas.

Historicamente, o problema de descobrir qual era a quantidade conservada em qualquer tipo de colisão entre partículas foi o que levou à definição correta do momentum linear (quantidade de movimento) de um corpo material, como o produto da sua massa pela sua velocidade vetorial,

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{14}$$

(Descartes, por exemplo, havia inicialmente definido o momentum linear como o produto da massa pela velocidade *escalar* do corpo, que não se conserva no caso de duas bolas de bilhar se chocando num plano). De certa forma, este também foi o caminho tomado por Einstein. Ele logo verificou que o Principio da conservação do momentum linear, definido de acordo com a equação (14), era não covariante. Isto é, considerando-se uma colisão bidimensional entre duas bolas de bilhar idênticas ($m_1 = m_2 = m$), por exemplo, Einstein verificou que se a quantidade vetorial

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2,$$

onde os sub índices 1 e 2 se referem às bolas de bilhar, era a mesma antes e depois da colisão descrita por um dado observador inercial O, a quantidade correspondente para um outro observador inercial O'

$$m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2,$$

não era a mesma antes e depois da colisão. Mas Einstein verificou que a quantidade

$$\frac{m_1}{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}\mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}}\mathbf{v}_2$$

era a mesma antes e depois da colisão, para qualquer observador inercial. De forma que o Princípio da conservação do momentum linear tornar-se-ia novamente covariante se o momentum linear relativístico de um corpo ou partícula fosse redefinido para

$$\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\mathbf{v}. \tag{15}$$

Note que esta expressão se reduz à definição clássica para o momentum linear, dada pela equação (14), quando $v \to 0$. Por outro lado, no limite em que $v \to c$, p tende ao infinito!

Alguns autores preferem continuar definindo o momentum linear de um corpo como o produto de sua velocidade vetorial pela sua *massa*, como expresso pela equação (14). Para tal, então, se define o que chamam de *massa relativística*,

$$m = m_o / \sqrt{1-(v/c)^2}, \tag{16}$$

onde m_o é a massa do corpo medida no seu referencial próprio, a chamada "massa de repouso". A "massa relativística", então, seria uma medida da *inércia* do corpo como medida num referencial em que o corpo esteja se movendo com velocidade relativa v. Imagine, por exemplo, um elétron sendo progressivamente acelerado dentro de um acelerador de partículas, a partir do repouso. Enquanto sua velocidade escalar for muito pequena comparada com a velocidade da luz no vácuo, sua massa relativística praticamente se confunde com a de repouso, mantendo-se aproximadamente constante, de forma que quando se dobra de valor a força resultante imprimida ao elétron para acelerá-lo, sua aceleração *dobra* proporcionalmente de valor; e a velocidade da partícula ao final de um dado intervalo de tempo decorrido torna-se quatro vezes maior do que aquela que seria alcançada no mesmo intervalo de tempo com a aceleração original. Mas quando v torna-se comparável a c, observa-se que ao dobrar a força resultante imprimida, a aceleração não torna-se duas vezes maior do que antes, torna-se apenas um pouco maior do que era, de forma que a partícula não mais se acelera de acordo com a Segunda lei de Newton, como se sua massa fosse constante. Tudo se passa como se a inércia, medida pela massa, estivesse tornando-se cada vez maior com o aumento da velocidade relativa do elétron. Tudo isso é observado em experimentos com aceleradores de partículas e, de fato, consegue-se acelerar elétrons ou outras partículas elementares a velocidades escalares relativas muito próximas da velocidade da luz no vácuo, mas jamais alcançando-se exatamente uma velocidade final exatamente igual a c, ou maior.

Mas a maioria físicos prefere se referir a massa como simplesmente aquilo que é medido com uma balança, com o corpo estando em repouso com respeito ao observador. Ou seja, com aquilo que há pouco tínhamos denominado "massa de repouso".

A Segunda Lei de Newton

A Segunda lei de Newton do movimento é expressa de maneira mais geral como "a força resultante ($\mathbf{F_R}$) sobre um corpo é igual à taxa de variação de seu momentum linear ou quantidade de movimento com o decorrer do tempo" (essencialmente, foi assim mesmo que Newton definiu sua Segunda lei, como pode ser encontrado no volume I do *Principia*). Expresso em notação matemática moderna, ela é escrita como

$$\mathbf{F_R} = d\mathbf{p}/dt, \tag{17}$$

onde, do lado direito, a *derivada* do vetor momentum linear corresponde à "taxa de variação da quantidade de movimento" mencionada antes, e o momentum é definido de acordo com a equação (14). Logo, se a massa do corpo é constante, então podemos reescrever a Segunda lei como

$$\mathbf{F_R} = m\mathbf{a},$$

onde $\mathbf{a}$ é a aceleração (a derivada do vetor velocidade instantânea do corpo), que é a forma mais popular como se conhece a Segunda lei.

Como fica tudo isso de acordo com a relatividade restrita?

Quando a velocidade escalar do corpo é relativística, como vimos, não é mais possível considerar a massa como constante ou, equivalentemente, o momentum linear como sendo dado pela equação (14). Continuando a tomar como verdadeiro o enunciado original de Newton para a Segunda lei, mas substituindo o momentum clássico pelo momentum relativístico dado pela equação (15), obtemos para a força resultante

$$\mathbf{F_R} = \frac{d}{dt}\left[\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\mathbf{v}\right] = m\mathbf{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) + \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\frac{d}{dt}\mathbf{v}.$$

O primeiro termo do lado direito tem mesma direção e o mesmo sentido que a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula, mas o segundo termo contém a derivada de $\mathbf{v}$ com respeito ao tempo e por isso não está na direção da velocidade. Decompondo, então, a derivada de $\mathbf{v}$ em duas componentes ortogonais, uma componente *transversal* à direção de $\mathbf{v}$, que chamaremos de *aceleração transversal*,

$$\mathbf{a_t} = (d\mathbf{v}/dt)_t,$$

obtemos imediatamente a componente transversal da força resultante

$$\mathbf{F_t} = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)}}\mathbf{a_t}. \tag{18}$$

Analogamente, define-se a componente da aceleração que é *longitudinal* ao movimento,

$$\mathbf{a_l} = (d\mathbf{v}/dt)_L.$$

Exercício 24: mostre que $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) = \frac{v}{c^2\sqrt{1-(v/c)^2}}\,a_L$.

Usando o resultado deste exercício, obtemos a componente longitudinal da força resultante,

$$F_L = \frac{mv^2}{c^2[1-(v/c)^2]^{3/2}}\,a_L + \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\,a_L = \frac{m}{[\,1-(v/c)^2\,]^{3/2}}\,a_L. \tag{19}$$

Como os coeficientes que multiplicam a_t e a_L nas equações (18) e (19), respectivamente, *não são* os mesmos, concluímos que, em velocidades relativísticas, o vetor aceleração *não é paralelo ao vetor força*, como acontece na mecânica Newtoniana. Este fenômeno, previsto por Einstein em 1905, foi efetivamente comprovado experimentalmente por A. H. Bucherer, em 1909. Subseqüentemente, as equações (18) e (19) foram confirmadas experimentalmente muitas vezes, por vários grupos de pesquisa em física de partículas, em várias partes do mundo, e presentemente é levada em conta sempre que se deseja projetar um novo acelerador de partículas a ser construído.

Energia de repouso e energia cinética relativística

Vamos obter agora a expressão para a energia cinética de um corpo ou partícula em movimento relativístico. Para facilitar as deduções, vamos tratar apenas do movimento uni dimensional numa certa direção, que será o eixo x. Embora se trate de um caso particular de movimento (uni dimensional), os resultados obtidos ao final serão facilmente generalizados para o caso de um movimento mais geral, tri dimensional.

Vamos supor que a partícula esteja submetida a uma força resultante F_R, que atua o tempo todo ao longo da direção x, mas cuja resultante pode variar em função da posição onde se encontra a partícula. Dizemos que F_R, neste caso, é uma função de x. Nosso ponto de partida será o fato de que o trabalho (positivo) da força resultante ("trabalho resultante") que atua sobre um corpo corresponde a uma transferência de energia para o corpo, aumentando-a em relação ao seu valor inicial. No caso de uma partícula *não* relativística, vamos relembrar como se usa esta idéia para deduzir a famosa expressão

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

para a energia cinética clássica do corpo. Suponhamos que o corpo sobre o qual atua a resultante se encontre inicialmente em repouso na posição x = 0. No caso não relativístico, a força resultante é

$$F_R = m\,a = m\,\frac{dv}{dt}.$$

O trabalho realizado por essa força variável até um instante posterior t, quando o corpo se encontra numa posição x com velocidade relativa v , é igual a

$$W_R = \int_0^X F_R\,ds = m\int_0^X \left(\frac{dv}{dt}\right)(vdt) = \int_0^V \frac{dx}{dt}dv = \int_0^V vdv = \frac{1}{2}mV^2. \tag{20}$$

Como este trabalho é igual à variação da energia cinética e como o corpo estava inicialmente desprovido de qualquer energia cinética por estar inicialmente em repouso, segue que a energia cinética final dele é aquela dada pela expressão (20).

Agora vamos repetir essa dedução para o caso de uma partícula relativística. Neste caso, a força resultante uni dimensional é dada por

$$F_R = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right],$$

de modo que o trabalho resultante é

$$W_R = \int_0^x F_R\, ds = \int_0^x \left[\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right](vdt) = m\int_0^x v\, d\left[\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right].$$

Mas (*Exercício 23*)

$$d\left[\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right] = \frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}},$$

de modo que

$$W_R = m\int_0^v \frac{vdv}{\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}.$$

Fazendo a troca de variável de integração de v para a nova variável u definida como

$$u = 1-\frac{v^2}{c^2},$$

a integral anterior transforma-se em

$$W_R = -\frac{mc^2}{2}\int_1^{1-\frac{v^2}{c^2}} u^{-3/2}du = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2.$$

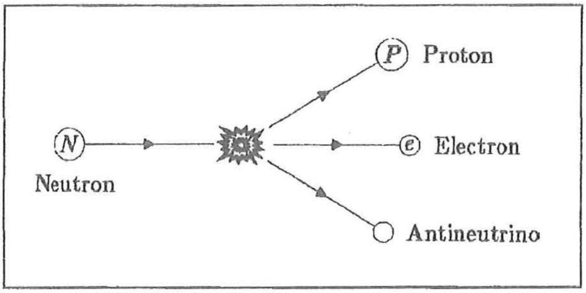
O primeiro termo do lado direito depende do valor da velocidade final alcançada pelo corpo, enquanto o segundo é independente de v, dependendo apenas de sua massa (ou "massa de repouso", como preferem outros). Como o corpo estava inicialmente em repouso no sistema de coordenadas usado, isso sugere que interpretemos o primeiro termo como sendo a *energia mecânica relativística* final do corpo,

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{21}$$

enquanto o segundo termo é interpretado como sendo a *energia mecânica de repouso* intrínseca do corpo,

$$E_o = mc^2. \tag{22}$$

também conhecida como "energia de massa" ou "equivalência massa-energia". Esta talvez seja a mais conhecida equação de toda a história da Física. De acordo com tal interpretação, se uma quantidade de massa (de repouso) m for destruída em algum processo físico, então uma quantidade de energia igual a mc^2 deve ser liberada. É esta conversão direta de uma parte da massa de repouso em energia que explica a enorme liberação energética em explosões nucleares ou em reatores nucleares de fissão. A primeira comprovação experimental da validade de (22) veio da reação de desintegração espontânea de um neutron (N) num próton (P), mais um elétron (e^-), mais um anti neutrino do elétron (ν_e), a reação chamada de desintegração beta, $N \rightarrow P + e^- + \nu_e$, ilustrada na figura seguinte, que ocorre quando o neutron se encontra fora do núcleo atômico (dentro do núcleo o neutron é estável).



A massa de repouso do neutron é conhecida, sendo $13{,}9 \times 10^{-28}$ grama maior do que as massas do próton e do elétron somadas. O neutrino não tem massa de repouso. Esta diferença de massa equivale pela relação (22) a uma energia igual a $13{,}9 \times 10^{-28} \times c^2 = 1{,}25 \times 10^{-7}$ erg, o que concorda exatamente com a quantidade total de energia cinética observada nos produtos da desintegração (ou seja, o próton, o elétron e o neutrino), dentro da precisão das medidas.

A *energia cinética relativística* adquirida pelo corpo deve ser, então, a diferença entre essas duas energias, representando, assim, o aumento de energia devido ao aumento da velocidade escalar do corpo, ou seja,

$$K = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}-1\right]. \tag{23}$$

Esta expressão se reduz à equação (20) para a energia cinética clássica, no limite em que $v \ll c$. Para mostrar isso, podemos fazer uso do teorema binomial de Newton, que estabelece que

$$(1+a)^n = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2!}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3 + \ldots$$

No caso da equação (23), vamos expandir o primeiro termo entre colchetes, para o qual identificamos $n = -1/2$ e $a = (v/c)^2 \ll 1$, de forma que podemos desprezar todos os termos da expansão para os quais a quantidade a aparece elevada a potências maiores do que a unidade, obtendo a aproximação

$$K \cong mc^2\left[1+(-1/2)(v/c)^2-1\right] = \frac{1}{2}mV^2.$$

Uma relação muito útil entre a energia mecânica e o momentum relativísticos, obtida facilmente a partir das equações (2) e (7), é (*Exercício 24*)

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{24}$$

Exercício 25. : suponha que a relação seja válida num certo referencial inercial S. Use as equações da TL para encontrar as correspondentes quantidades num outro referencial inercial S', e mostre que a equação que relaciona-as entre si tem a mesma forma matemática de (24),

$$E'^2 = p'^2c^2 + m^2c^4,$$

ou seja, mostre que a equação (24) é covariante frente a uma TL.

A radiação eletromagnética é descrita na Física clássica como uma onda, possuindo um comprimento de onda (a distância entre dois máximos consecutivos da onda, num dado instante de tempo) $\lambda = c/f$, onde f é a freqüência. Sabe-se que uma onda eletromagnética carrega consigo atributos físicos como energia e momentum linear. Usando as equações de Maxwell, pode-se mostrar que a relação entre estas duas quantidades é

$$P = E/c.$$

Essa relação também é automaticamente obtida a partir da relatividade restrita, usando-se a equação (24) e tomando-se a massa de repouso da onda eletromagnética como sendo nula. Por outro lado, na Mecânica Quântica a radiação eletromagnética é descrita como sendo formada por *quanta* de luz, os *fótons*, que possuem propriedades corpusculares de partículas, embora desprovidas de massa de repouso. E a energia de um fóton esta diretamente relacionada com a freqüência f através da famosa relação de Planck, E = h f, onde h = 6,625 x 10^{-27} erg-s é a *constante de Planck*. Então usando a equação (24) para o fóton com massa nula, obtemos imediatamente que $E = pc = h f = h c/\lambda$, ou seja,

$$P = h / \lambda,$$

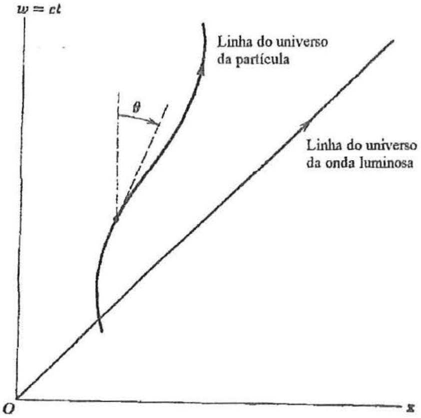
que é a famosa relação de de Broglie (1923) entre o momentum linear relativístico do fóton e seu comprimento de onda.

Diagramas de Minkowski e o espaço-tempo (1908)

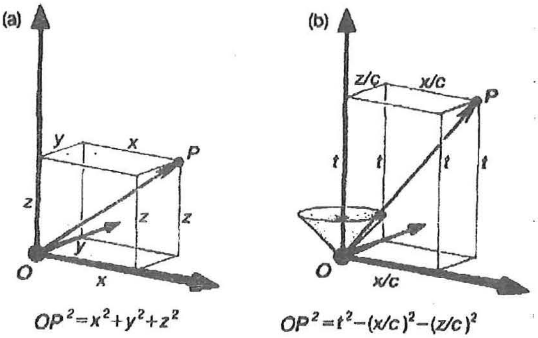
Einstein mostrou que o espaço e o tempo são relativos: o comprimento de um objeto na direção de seu movimento relativo é medido diferentemente por diferentes observadores inerciais ("contração de Lorentz"), e intervalos de tempo entre dois eventos quaisquer são medidos como sendo diferentes por diferentes observadores inerciais ("dilatação temporal"). Em 1908, o matemático alemão Hermannn Minkowski (ex-professor de Einstein) descobriu que subjacente à teoria da relatividade restrita havia uma estrutura matemática *absoluta*, que unificava o espaço tri dimensional e o tempo num espaço tetra dimensional, o "espaço-tempo" ou espaço de Minkowski. Ao fazer isso, Minkowski elevou o tempo à categoria de "coordenada" (geometria), uma mudança filosófica notável em relação à Física Newtoniana, onde o tempo é encarado como um simples *parâmetro*. Neste caso, a "história" de uma partícula, por exemplo, é encarada como uma sucessão de pontos no espaço tri dimensional Euclidiano, cada um deles "rotulado" ou *parametrizado* pelo tempo. Para Minkowski não, tempo também é "coordenada"! A idéia de Minkowski é a de "geometrizar" o tempo, unificando o espaço tri dimensional ordinário Euclidiano e o tempo num espaço-tempo tetra dimensional.

A primeira reação de Einstein ao trabalho de Minkowski foi decididamente negativa, considerando-a tão somente um "complicação matemática desnecessária", que por sua própria natureza desviava o pensamento da Física para a Matemática. Mas o tempo encarregou-se de mostrar-lhe que a idéia de geometrizar e unificar o espaço euclidiano ordinário e o tempo era extremamente útil para os físicos. Ela lhe seria fundamental na construção da Teoria da Relatividade Geral, de 1915.

O espaço-tempo é dito absoluto no sentido de que ele parece o mesmo quando observado a partir de sistemas de coordenadas diferentes, sendo, portanto, *independente* de sistemas de coordenadas. Por exemplo, a distância entre dois pontos deste espaço é a mesma quando medida por qualquer observador inercial (ao contrário da distância ou "comprimento" no espaço tri dimensional e Euclidiano ordinário, que como vimos, é relativa). Uma noção ainda mais primitiva que a de distância é a de "ponto". No espaço-tempo, um ponto significa um evento, algo que acontece em algum lugar no espaço tri dimensional ordinário (euclidiano) e num certo instante de tempo. É muito útil poder visualizar o espaço-tempo através de uma representação gráfica conhecida como "diagrama de Minkowski". Com isso, a idéia de "geometrizar" o espaço-tempo torna-se mais concreta. Como é impossível desenhar em quatro dimensões, e pior ainda em duas dimensões como é o caso desta folha de papel, será preciso ignorar uma dimensão (e usar perspectiva ....), ou duas (sem a necessidade de usar perspectiva !), que terão necessariamente de ser todas *espaciais*, senão estaremos negligenciando o tempo. Para tornar a análise o mais simples possível, vamos considerar, então, o caso em que apenas uma dimensão espacial é relevante, juntamente com o tempo, como é, por exemplo, o caso do movimento uni dimensional de uma partícula elementar (veja a figura seguinte). A 'história" de uma partícula elementar num diagrama de Minkowski corresponderá a uma linha, chamada a "linha de mundo" da partícula. A linha de mundo de uma partícula que se move com velocidade relativa constante corresponderá a uma linha *reta*. Portanto, a linha de mundo de um raio de luz (ou de um Fóton) se propagando no vácuo, na direção x de um sistema de coordenadas usado por um certo observador inercial, será representada por uma linha reta inclinada de 45^o com respeito ao eixo x do diagrama de Minkowski.



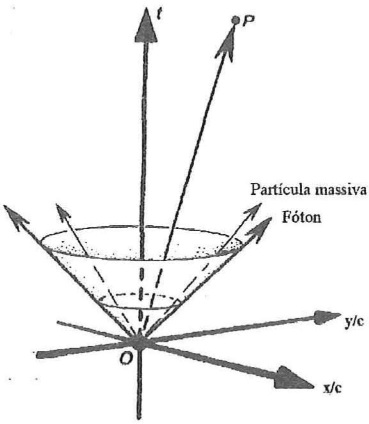
Observe que a inclinação θ da linha de mundo de uma partícula *material* (com massa de repouso não nula) deve ser sempre menor do que 45^o. Por que? Observe também que no eixo vertical estão as coordenadas w = ct. Isto foi feito com a finalidade de tornar a unidade do "tempo geometrizado", w, idêntica às das coordenada espacial ordinária x, metros no M.K.S. Com isso, podemos agora falar em "metros de tempo ! Ou, equivalentemente, poderíamos "temporizar" o espaço tri dimensional ordinário, dividindo x, y e z por c, medidos, portanto, em "segundos de espaço". Esta alternativa é utilizada na parte (b) da figura abaixo, que representa eventos ocorrendo num mesmo plano espacial y = constante (que foi a única dimensão ignorada neste diagrama de Minkowski), para instantes t > 0.



$OP^2=x^2+y^2+z^2$ $\qquad$ $OP^2=t^2-(x/c)^2-(z/c)^2$

A parte (a) da figura ilustra um ponto P no espaço tri dimensional Euclidiano ordinário (o tempo não está sendo representado) e, na legenda, como o quadrado da *distância* entre P e a origem do sistema de eixos coordenadas é calculada, usando-se o teorema de Pitágoras da geometria Euclidiana. A parte (b) é um diagrama de Minkowski com o tempo no eixo vertical, e a legenda correspondente indica como se deve calcular o quadrado da *distância* OP entre o evento P e a origem do sistema de eixos, uma espécie de "teorema de Pitágoras" do espaço de Minkowski. Dada a forma matemática diferente que este teorema assume no espaço de Minkowski, conclui-se que este *não constitui* um espaço Euclidiano.

A próxima figura é uma ampliação mais detalhada do *cone* que aparece na parte (b) da figura anterior, apenas com a dimensão z substituída pela dimensão y (ou seja, representando eventos que estão ocorrendo num certo plano espacial z = constante). Neste cone estão contidas as linhas de mundo de todos os raios de luz (ou fótons) que foram simultaneamente emitidos em t = 0 de uma fonte puntual localizada na origem do sistema de coordenadas. Por este motivo, recebeu o nome sugestivo de "cone de luz". Podemos dizer, por analogia, que este cone representa a "superfície de mundo" do "flash" de luz emitido pela fonte. Os dois círculos mostrados ilustram as posições da frente de onda esférica sobre o plano z = constante, em dois instantes de tempo diferentes.



Observe que a linha de mundo de uma partícula material se movimentando com velocidade relativa constante foi desenhada como um alinha reta *interna* ao cone. Por que?

Como nada pode viajar com velocidade maior do que a da luz no vácuo, então não pode haver nenhuma conexão *causal* entre eventos (pontos) fora do cone de luz e o evento O na origem do diagrama. Alternativamente, eventos no interior do cone representam eventos que poderiam estar causalmente conectados ao evento O.

Para aqueles que desejam aprender mais sobre esta parte de diagramas de Minkowski, recomendo fortemente que visitem a home page do Professor Michel Betz (IF-UFGRS),

http://www.if.ufrgs.br/~betz/space_time/index.htm.

Lá se encontra um ótimo curso de introdução à relatividade restrita, com enfoque bem diverso do que foi adotado neste curso. O curso contém muitos diagramas coloridos que ilustram muito bem a geometrização do espaço-tempo levado à cabo por Minkowski. Boa consulta!

Referências

[1] *"Introdução à Relatividade Especial", Robert Resnick, Editora da Universidade de S. Paulo, 1971.*

[2] *"Física", Jay Orear, capítulo 11, Livros Técnicos e Científicos Editora ltda., 1971.*

[3] *"Fundamentos da Física", David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker, volume 3, capítulos 25 e 31, Livros Técnicos e Científicos Editora ltda., 1993.*

[4] *Ann. d. Phys. volume 17 (1905). Uma tradução portuguesa se encontra na coletânea "O Princípio da Relatividade", Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1958.*

[5] *"How I created the theory of Relativity", artigo baseado numa palestra proferida por Einstein em dezembro de 1922, na Universidade de Kyoto, Japão. O artigo foi publicado em inglês na revista Physics Today de agosto de 1982.*

[6] *"Inward Bound", Abraham Pais, Clarendon Press - Oxford, 1985.*

[7] *"Spacetime Physics", E. F. Taylor e J. A. Wheeler, W. H. Freeman and Company, N. York, 1992.*

[8] *Weisskopf, V. F. , Physics Today 13, 24 (1960); ver também "Introductory Mechanics", Edwin F. Taylor, páginas 346-360, John Wiley & Sons, N. York, 1963.*

[9] *Boughn, S. P. , American Journal of Physics, 57, 791 (1989).*

[10] *Shaw, R. , American Journal of Physics 30, 72 (1962).*

[11] *Rindler, W. , American Journal of Physics 29, 365 (1961).*

GEF - Grupo de Ensino de Física
PAS - Programa de Atualização em Serviço para Professores de Física

Série: Textos de Apoio ao Professor de Física

nº 1: Um Programa de Atividades sobre Tópicos de Física para a 8ª Série do 1º Grau.
Axt,. R., Steffani, M.H. e Guimarães, V.H., 1990.

nº 2: Radioatividade.
Brückmann, M.E. e Fries, S.G., 1991.

nº 3: Mapas Conceituais no Ensino de Física.
Moreira, M.A., 1992.

nº 4: Um Laboratório de Física para Ensino Médio.
Axt, R. e Brückmann, M.E., 1993.

nº 5: Física para Secundaristas - Fenômenos Mecânicos e Térmicos.
Axt, R. e Alves, V.M., 1994.

nº 6: Física para Secundaristas - Eletromagnetismo e Óptica.
Axt, R. e Alves, V.M., 1994.

nº 7: Diagramas V no Ensino de Física.
Moreira, M.A, 1997.

nº 8: Supercondutividade - Uma Proposta de Inserção no Ensino Médio.
Ostermann, F., Ferreira, L.M., Cavalcanti, C.H., 1998.

nº 9: Energia, entropia e irreversibilidade.
Moreira, M.A., 1999.

nº 10: Teorias construtivistas.
Moreira, M.A. e Ostermann, F., 1999.

nº 11: Teoria da relatividade especial.
Ricci, T.F., 2000.