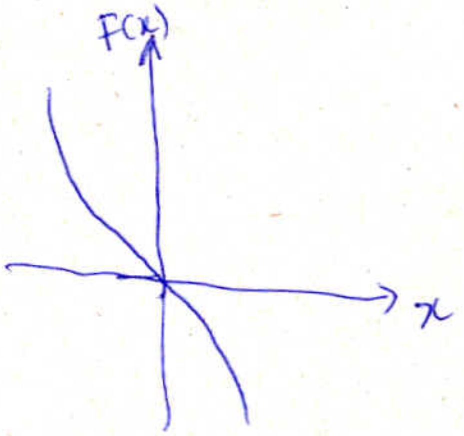
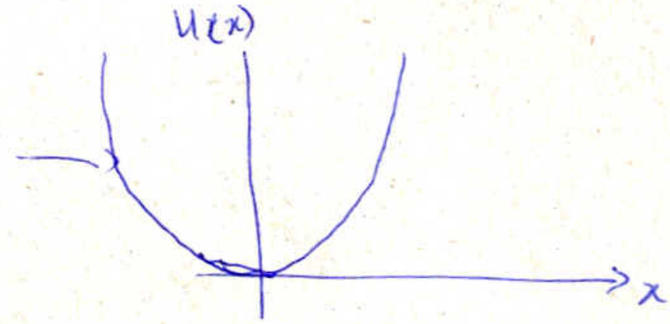
Oscilações

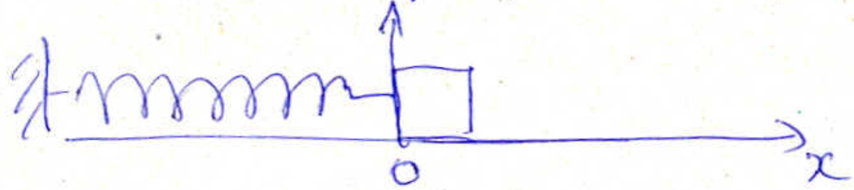
Todo movimento em que a partícula ou corpo rígido está sob a ação de uma força restauradora (ou seja, em torno de uma posição de mínimo da energia potencial) é um movimento oscilatório.





Se a força restauradora é do tipo $-kx$, então o movimento tem uma descrição matemática relativamente simples. Esse movimento é denominado MHS (Movimento Harmônico Simples). Como ~~para~~ qualquer tipo de potencial $U(x)$ com um ponto de mínimo pode sempre ser, próximo ao mínimo, aproximado por uma parábola (i.e. potenciais realísticos, que são contínuos e têm derivadas contínuas), ~~p~~ então todo movimento oscilatório, para pequenas amplitudes de oscilação pode ser aproximado por um MHS. Moléculas, núcleos atômicos, etc. ~~podem ser~~ apresentam movimentos oscilatórios que podem ser descritos por MHS.

Consideremos o caso simples de uma massa m presa a uma mola de constante elástica k, sobre uma superfície horizontal sem atrito:



Para qualquer valor de $\underline{x}$, a força resultante sobre a massa será sempre $F(x) = -kx$.

Portanto, a 2ª lei de Newton pode ser escrita como:

$$m\frac{dv}{dt} = -kx \quad \text{mas} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0}$$

Essa é uma equação diferencial linear de 2ª ordem. Linear, pois x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ aparecem somente elevado à potência 1 (não aparecem p.ex. x^2, $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3$, etc.). Resolver a equação corresponde a encontrar *todas* as possíveis funções $x(t)$, tais que $m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0 \;\; \forall t$.

É fácil ver que toda equação diferencial de 2ª ordem (i.e. a derivada + alta que aparece na equação é a 2ª), tem soluções que dependem de duas constantes arbitrárias: o valor de $x(t=t_0)$ e ~~o~~ de $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = v(t_0)$.

definindo a constante $\omega^2 = \frac{k}{m}$, a eq. p/ o MHS pode ser escrita como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

A ~~resposta da equa~~ A solução da equação é a resposta para a pergunta: Qual a função $x(t)$, cuja derivada segunda é igual à própria função $x(t)$, multiplicada por uma constante negativa?

Todos conhecemos duas destas funções:

$x(t) = \operatorname{sen}(\omega t)$ e $x(t) = \cos(\omega t)$,

com $\omega = \sqrt{k/m}$.

Pode-se facilmente verificar que a função

$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t)$ ~~tb~~ é solução da equação. Pode-se demonstrar tb, que p/ valores particulares de C e ϕ, a função

$$C \cos(\omega t + \phi) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$$

e portanto tb é solução da equação.

Vamos primeiro testar a solução

$$x(t) = A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t$$

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t - B\omega\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\,\text{sen}\,\omega t - B\omega^2\cos\omega t = -\omega^2(A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t)$$

ou $\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$

p/ $t_0 = 0$:

$$x(0) = B \quad \text{e} \quad v(0) = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = A\omega$$

portanto

$$\boxed{x(t) = \frac{V_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t + X_0\cos\omega t}$$

Usando agora a solução na forma

$$x(t) = C\cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{dx}{dt} = -C\omega\,\text{sen}\,(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -C\omega^2\cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$

$$X(0) = X_0 = C\cos\phi \qquad V_0 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_0 = -C\omega\,\text{sen}\,\phi$$

(note que $C = \underline{X_{max}}$ e $C\omega = \underline{V_{max}}$)

Seja T o período do movimento oscilatório (5)
Sabemos que $\cos(\theta+2\pi) = \cos\theta$. Portanto T é definido como:

$$[\omega(t+T)+\phi] - [(\omega t + \phi)] = 2\pi$$

portanto $\omega T = 2\pi$ ou $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$

Definimos a frequência do movimento como o inverso do período:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

As unidades de f são ciclos/s ou Hertz.
Para o caso do movimento massa-mola,

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} \quad , \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k/m}$$

Energia no MHS

No caso do movimento massa-mola, a energia mecânica está armazenada na forma de energia potencial elástica (mola) e energia cinética da massa m:

$$E_n = U + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Substituindo $x = C\cos(\omega t+\phi)$ e $v = -C\omega\,\text{sen}(\omega t+\phi)$

$$E = \frac{1}{2}kC^2\cos^2(\omega t+\phi) + \frac{1}{2}mC^2\omega^2\,\text{sen}^2(\omega t+\phi)$$

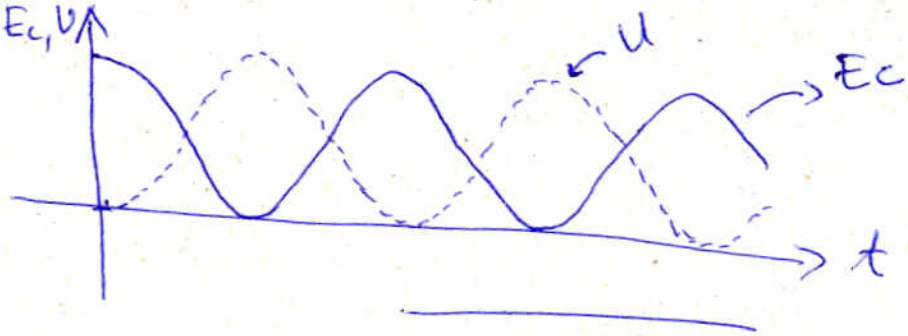
Como $\omega^2 = k/m$;

$$E = \frac{1}{2}kC^2\left(\text{sen}^2(\omega t+\phi) + \cos^2(\omega t+\phi)\right) = \frac{1}{2}kC^2$$

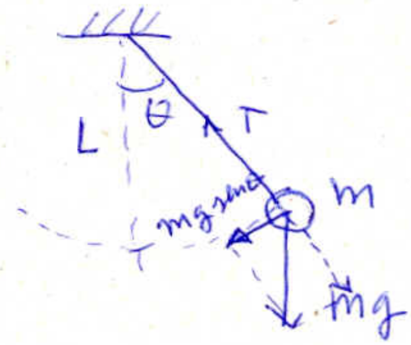
Lembrando que $C = x_{max}$,

$$\boxed{E_M = \frac{1}{2} k x_{max}^2}$$

A energia mecânica, embora seja constante, oscila continuamente entre os modos energia potencial / energia cinética.



Pêndulo Simples



As forças agindo na massa m são a tração (T) no fio e a força peso, mg. Decompondo-se mg nos componentes tangencial e radial, temos, para a posição angular θ do fio em relação à vertical: $\left(|\alpha| = \frac{a_T}{L} = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{L}\right)$

$\cancel{\frac{d^2\theta}{dt^2}}$

$$\vec{\tau}_{res} = I\vec{\alpha}$$

$$-L \cdot mg\,\text{sen}\,\theta = mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$$ (note que o torque é restaurador!)

ou

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta}$$

Essa equação (em θ) não é linear, já que do lado direito aparece $\text{sen}(\theta)$.
Portanto o movimento de um pêndulo não é harmônico simples e a solução da equação para ele tb. não é simples. Entretanto, podemos aqui tratar do caso aproximado, para pequenas oscilações. Como para valores pequenos de θ podemos usar a relação $\text{sen}(\theta) \simeq \theta$. Por exemplo, p/ $\theta = 15°$ $\left(= \frac{15}{57}\right)$

$\text{sen}\left(\frac{15}{57}\right) = 0{,}260$; $\frac{15}{57} = 0{,}263$ dif $= \frac{3}{263} = 1{,}1\%$

para valores de θ menores que $15°$, a aprox. é ~~ainda~~ cada vez melhor. Portanto, na condição de pequenas oscilações, podemos escrever:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta = -\omega^2\theta$$

Cuja solução já nos é conhecida:

$$\theta(t) = C\cos(\omega t + \phi)\ , \quad \omega = \sqrt{g/L}$$

Com $\theta(0) = C\cos\phi$ e $\omega_0 = \left.\frac{d\theta}{dt}\right|_0 = -C\omega\,\text{sen}(\omega t + \phi)$

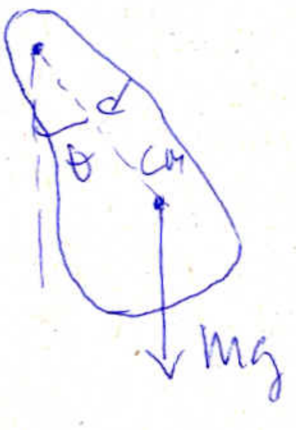
Cuidado p/ ñ misturar conceitos: $\omega_0 = \frac{d\theta}{dt}$ é a velocidade angular em $t=0$; ~~constante~~ ~~ω~~
A velocidade angular da massa m varia com o tempo. O ω dentro do sen/cos é uma constante
$\omega = \sqrt{g/L}$

Para a aproximação de pequenas amplitudes, no pêndulo simples,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{L/g}$$ (não depende da amplitude).
(e nem da massa $\underline{m}$!)

Pêndulo Físico.

Muitos pêndulos de interesse não podem ser descritos por uma massa $\underline{m}$ de dimensões desprezíveis, pendurada por uma corda fina de comprimento L. Quando a massa $\underline{m}$ é distribuída ao longo do comprimento $\overline{L}$, o pêndulo é chamado "Pêndulo Físico".



Novamente, podemos escrever:

$$\vec{\tau}_{res} = I\vec{\alpha}$$

$$\tau_{res} = -mgd\,\text{sen}\,\theta$$

ou

$$-mgd\,\text{sen}\,\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\,\text{sen}\,\theta.$$ Para pequenas oscilações:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\theta = -\omega^2\theta$$

onde $$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}}$$

Oscilações amortecidas

Nos sistemas oscilantes reais, observa-se que a amplitude das oscilações diminuem com o tempo. Como vimos, a energia mecânica de um oscilador harmônico simples está diretamente relacionada ao quadrado da amplitude de oscilação:

$$E = \frac{1}{2} k X_{max}^2 .$$

Portanto, a diminuição da amplitude implica em dissipação de energia mecânica. No caso de um pêndulo simples, e em muitos outros, a força dissipativa é devido ao movimento dentro de um fluido (ar, óleo). Nestes casos, podemos aproximar a força dissipativa por $-bv$. A equação de movimento (2ª lei de Newton), nesse caso é:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{res} = -kx - bv = -kx - b\frac{dx}{dt}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Esta também é uma equação ~~lin~~ diferencial linear, de 2ª ordem. A solução geral, pode ser facilmente verificada:

$$x(t) = X_m e^{-bt/2m} \cos(\omega_a t + \phi)$$

Ou equivalentemente:

$$x(t) = e^{-(b/2m)t}\left(A\,\text{sen}(\omega_a t) + B\cos(\omega_a t)\right)$$

tomando $x(t) = X_m e^{-bt/2m}\cos(\omega_a t+\phi)$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = X_m\left(-\frac{b}{2m}e^{-bt/2m}\cos(\omega_a t+\phi) - e^{-\frac{bt}{2m}}\omega_a\,\text{sen}(\omega_a t+\phi)\right)$$

$$v(t) = X_m e^{-bt/2m}\left[-\frac{b}{2m}\cos(\omega_a t+\phi) - \omega_a\,\text{sen}(\omega_a t+\phi)\right]$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{X_m b}{2m}e^{-bt/2m}\left(-\frac{b}{2m}\cos(\omega_a t+\phi) - \omega_a\,\text{sen}(\omega_a t+\phi)\right\}$$

$$+ X_m e^{-bt/2m}\left[\frac{b\omega_a}{2m}\text{sen}(\omega_a t+\phi) - \omega_a^2\cos(\omega_a t+\phi)\right]$$

$$= X_m e^{-bt/2m}\left[\frac{b^2}{4m^2}\cos(\omega_a t+\phi) + \frac{b\omega_a}{2m}\text{sen}(\omega_a t+\phi) + \frac{b\omega_a}{2m}\text{sen}(\omega_a t+\phi) - \omega_a^2\cos(\omega_a t+\phi)\right]$$

(Chamando $\alpha = \omega_a t+\phi$)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}X_m e^{-bt/2m}\cos\alpha +$$

$$X_m e^{-bt/2m}\left(-\frac{b^2}{2m^2}\cos\alpha - \frac{b\omega_a}{m}\text{sen}\,\alpha\right) +$$

$$X_m e^{-bt/2m}\left(\frac{b^2}{4m^2}\cos\alpha + \frac{b\omega_a}{m}\text{sen}\,\alpha - \omega_a^2\cos\alpha\right)\Big\} = 0$$

$$X_m e^{-bt/2m}\left[-\frac{b^2}{4m^2}\cos\alpha - \omega_a^2 + \frac{k}{m}\right)\cos\alpha = 0$$

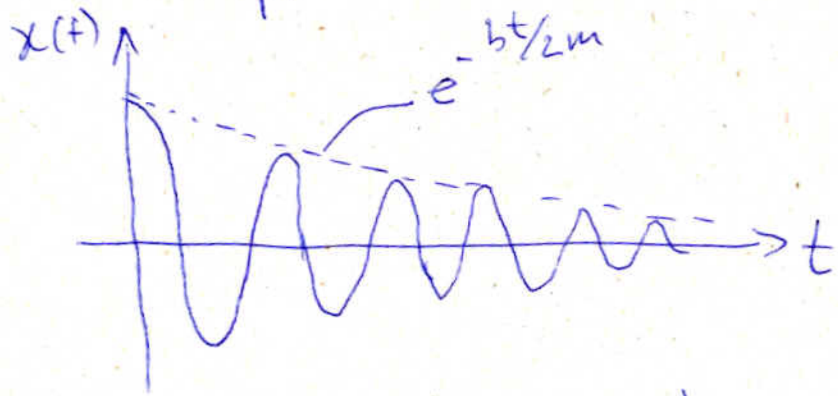
Para que a expressão seja nula $\forall t$, devemos ter:

$$-\frac{b^2}{4m^2} - \omega_a^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \omega_a^2 = \frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}$$

ou $\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$. Chamando $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a frequência do oscilador equivalente não amortecido:

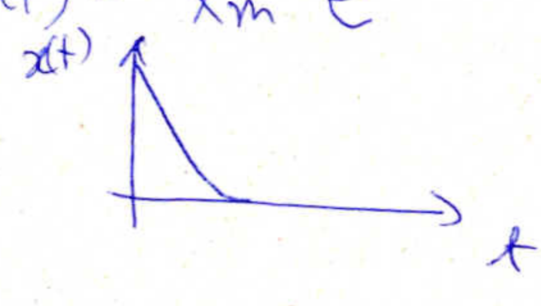
$$\boxed{\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$

Se $\frac{b}{2m} << \omega_0$, então o oscilador é chamado sub-crítico e a amplitude diminui lentamente com o tempo:

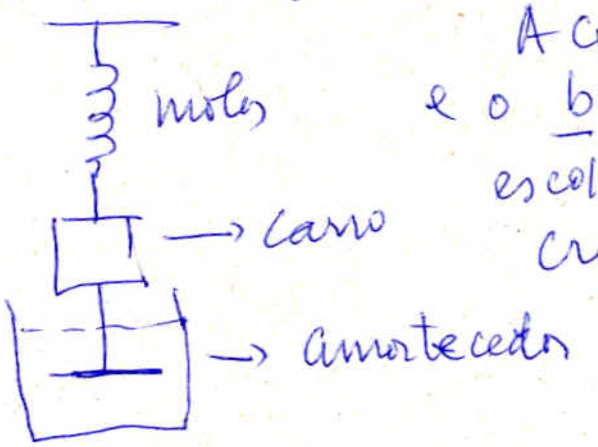


O caso em que $\omega_0 = \frac{b}{2m} \Rightarrow \omega_a = 0$ é chamado amortecimento crítico e o sistema não chega a oscilar. Note que nesse caso,

$$x(t) = X_m e^{-bt/2m} \cos\phi$$



Esse é o caso que se espera de um carro,
com os amortecedores em bom estado. A suspensão
de um carro ~~pode ser~~ é um sistema massa +
mola + força resistiva dos amortecedores (óleo)
Pode ser esquematizado como:



A constante de mola k
e o b do amortecedor são
escolhidos p/ ter amortecimento
crítico.

Quando os amortecedores envelhecem, b diminui
e o carro faz ~~vários~~ algumas oscilações antes
de estabilizar.

Oscilações Forçadas - Ressonâncias

Um oscilador normalmente está ~~s~~ sujeito a forças dissipativas, que diminuem a amplitude da oscilação. O pêndulo de um relógio não tem sua amplitude diminuindo com o tempo, pois há uma <u>força externa aplicada</u>, que realiza um trabalho e fornece uma quantidade de energia que compensa a perda. Ao empurrarmos uma criança em um balanço, fazemos a mesma coisa. Veja que nos dois casos, a força externa é periódica. Vamos agora ver o problema de um oscilador harmônico, sujeito a uma força externa periódica, $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$. A equação de movimento, supondo ainda uma força dissipativa $(-bv)$ é:

$$m \frac{dv}{dt} = -kx - bv + F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega t$$

pode-se verificar que nesse caso, a solução <u>estacionária</u> (i.e., depois de um comportamento <u>transiente</u> inicial) é:

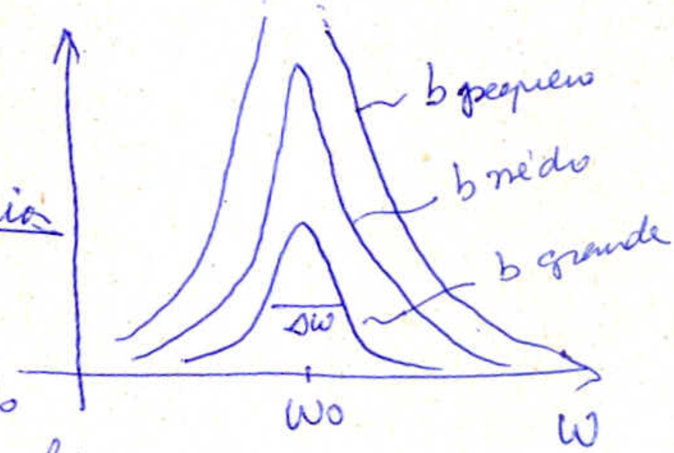
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{onde:}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência "natural" do sistema não amortecido.

Note que a amplitude de oscilação aumenta bastante quando $\omega = \omega_0$.

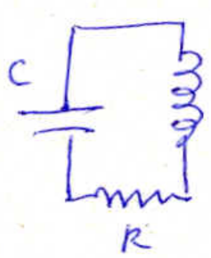
Nesse caso, dizemos que o sistema está em ressonância



O fator de qualidade Q de um sistema ressonante é dado pelo quociente entre a largura da ressonância ($\Delta\omega$) e a frequência de ressonância ω_0:

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

Circuitos ressonantes mecânicos são equivalentes a circuitos elétricos LRC (R correspondendo à dissipação de energia)



$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$