Mecânica de Fluidos

Vimos a descrição mecânica de um ponto material e posteriormente de um corpo rígido. Vamos agora descrever a mecânica dos fluidos.

Um solido tem volume e forma bem definidos. Embora forças externas suficientemente grandes ~~sejam~~ possam deformá-lo, ~~so~~ em geral não se alteram sob condições "normais". Já os fluidos (liquidos e gases) não tem forma definida, assumindo a dos recipientes que os contém. São portanto facilmente deformáveis, podendo escoar ou fluir facilmente.

Na descrição mecânica dos solidos, usamos bastante os conceitos de massa, e força. Para os fluidos, veremos que é mais interessante o uso dos ~~e~~ equivalentes densidade (massa/unidade de volume) e tensão (força/unidade de área).

As tensões em um ~~fluido~~ solido podem ser de dois tipos: paralelas à superficie (tensão de cisalhamento) e perpendiculares a ela. As tensões perpendiculares são chamadas de pressão (quando dirigidas para dentro do volume e de tração, quando dirigidas para fora do volume. Quando um solido é submetido a tensões de cisalhamento suficientemente grandes, ele se deforma até que as forças internas no solido (ligações atômicas) equilibrem a tensão externa.

Fluidos ideais (sem viscosidade) não conseguem equilibrar nenhuma tensão externa tangencial, pois não há nenhuma energia de ligação entre seus átomos/moléculas (ou são muito pequenos). Quando submetidos a tensões tangenciais, os fluidos simplesmente escoam na direção da força externa. Um fluido real pode responder a pequenas forças tangenciais, devido à viscosidade, um atrito interno entre camadas de fluido.

"Num fluido em equilíbrio, as tensões tangenciais são sempre nulas".

Pressão:

Tomemos um pequeno volume de um líquido, p.ex. da água em um copo. Sendo o volume deste cubo ΔV e a massa de água contida nele Δm, definimos a densidade do fluido como

$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$. A densidade em um ponto do fluido é calculada com o $\lim_{\Delta V \to 0}$ (neste caso, o $\to 0$ tem de ser tomado no sentido aproximado, i.e.: pequeno o suficiente comparado com as dimensões do fluido todo, mas grande p/ conter um número apreciável de átomos. No nível microscópico não existe um "fluido", mas um conjunto de partículas isoladas).

Sabemos que as forças atuando neste volume de fluido (exercidas pelo resto do fluido a seu redor) devem ser sempre perpendiculares à superfície do volume.

Essas forças superficiais produzem a pressão no ~~volume~~ no ~~do~~ cubo. Se num pequeno elemento de superfície do cubo (Δs) a força resultante for $\Delta\vec{F}$, definimos a pressão nesse ponto de superfície como

$$p = \left|\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta s}\right| \quad \left(\text{ou } \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta s}\right|\right).$$

Note que p é considerada positiva se a força $\Delta\vec{F}$ for para dentro do volume.

Neste volume de fluido, além dessas tensões (que são de superfície) age também uma força volumétrica, em cada partícula do fluido, a força gravitacional.

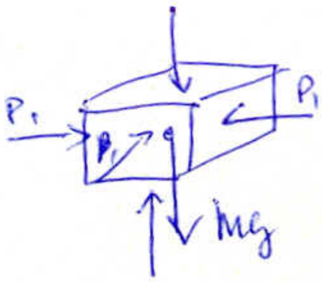
$$\vec{F}_g = m\vec{g}.$$

Na descrição de fluidos, é mais conveniente ~~usar~~ neste caso a densidade de força (volumétrica):

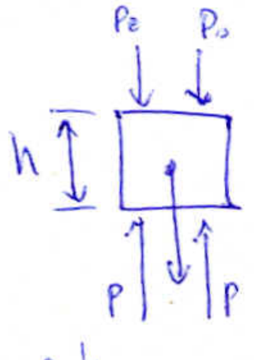
$$\vec{f} = \frac{\vec{F}_g}{V} = \rho\vec{g}$$

Equilíbrio do fluido

Continuando a examinar a pequena porção de fluido dentro do volume de água em um copo, sabemos que ele está em equilíbrio. Portanto, a resultante das forças externas sobre ele deve ser nula.



Não há outras forças nas laterais do cubo, a não ser a pressão exercida pelo restante do fluido. Portanto essas pressões tem de ser iguais em quaisquer desses lados, numa mesmo plano horizontal.

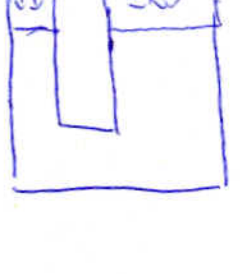


Já na faces superior e inferior, vemos que a pressão p_0 deve ser menor que P. Sendo a área dessas faces iguais a A, temos: $P_0 A + mg = PA$ para haver equilíbrio. Ou, como $m = \rho . V$ e $V = A . h$

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h}$$

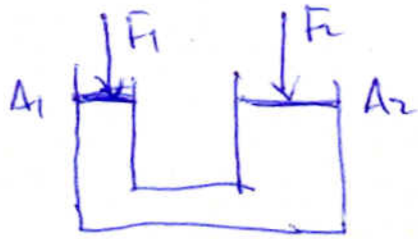
Princípio de Pascal

A expressão acima é valida para fluidos incompressíveis (o volume não se altera com a pressão) como é o caso dos líquidos. Dela, podemos também concluir que a pressão em um fluido é a mesma para qualquer ponto do fluido a uma mesma altura. Assim, se tivermos um fluido em um recipiente como o abaixo, o nível do



fluido nos dois "ramos" do recipiente deve ser sempre o mesmo, pois a pressão na superfície do líquido é a pressão atmosférica. Isso é conhecido "princípio dos vasos comunicantes".

Suponha agora que apliquemos uma força externa F_1, no ramo mais estreito, que tem área da superfície A_1. Se quisermos manter o fluido equilibrado, sabemos que no outro ramo, de área A_2, devemos aplicar uma força F_2 tal que



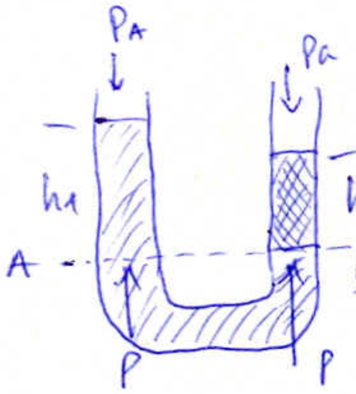
$$\boxed{\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{F_1 A_2 = F_2 A_1}$$

Esta relação é conhecida como "princípio de Pascal", enunciado por ele em 1663.

A prensa hidráulica, os elevadores de automóveis nos postos de gasolina, etc. funcionam com base nesse princípio. Sendo F_2 o peso do automóvel a ser elevado, a força F_1 a ser exercida deve ser ligeiramente mais que $F_2 \dfrac{A_1}{A_2}$. Com $A_1 \ll A_2$, $F_1 \ll F_2$ = peso do carro.

A conclusão a que chegamos, de que as alturas nos dois ramos de um vaso contendo fluido devem ser iguais, vale para um fluido homogêneo ocupando todo o recipiente (que a pressão deve ser igual nos dois ramos vale sempre).

Portanto, se tivermos um tubo em U, contendo dois fluidos que não se misturam (como água e óleo), de densidades diferentes, então as alturas em cada ramo do fluido serão diferentes.



Note que as pressões, nos dois lados, no plano horizontal AB devem ser iguais, já que o fluido contido abaixo de AB é homogêneo.

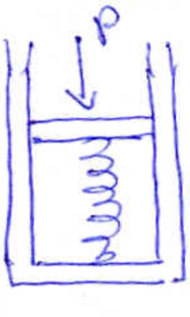
Portanto, temos: $p - p_A = \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$

e então $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$ ou $h_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} h_2$.

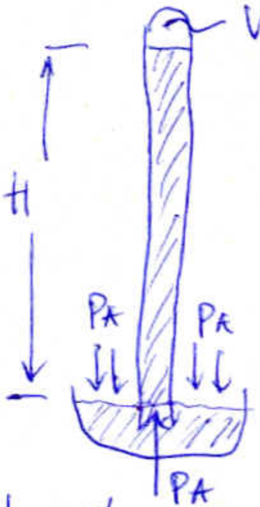
(a altura <u>menor</u> corresponde ao líquido de <u>maior</u> densidade).

Medida de Pressão: Manômetro e Barômetro.

Um sistema simples, bastante usado para medir pressão consiste em um cilindro, tampado com um pistão móvel. No interior do cilindro foi feito vácuo e há uma mola p/ equilibrar a pressão externa. Variando-se a pressão externa, o pistão descerá (pressão maior) ou subirá (pressão menor). A mola tendo sido previamente calibrada, pode-se então relacionar a altura do pistão com a pressão p.



O <u>Barômetro</u> de mercúrio é outro instrumento bastante usado p/ medir a ~~pres~~ pressão atmosférica. Se enchermos completamente um tubo longo e fechado em uma de suas extremidades com um líquido de densidade ρ e emborcarmos esse tubo em um recipiente aberto, como mostra a figura abaixo, o líquido se estabilizará em uma altura H.



No pequeno volume na extremidade superior do tubo, antes preenchido pelo líquido, agora não há nada (vácuo — na verdade, há um pouco de vapor do líquido. Escolhendo-se líquidos com baixa <u>pressão</u> de <u>vapor</u>, como o mercúrio, esse resíduo é desprezível).

Portanto, a pressão interna, nesta superfície do líquido é <u>zero</u>. Já na extremidade inferior, na altura do nível do líquido no recipiente será igual à pressão atmosférica P_A. Portanto, temos:

$$\boxed{P_A = 0 + \rho g H}$$

e H é uma medida da pressão atmosférica.

Unidades de Pressão.

A unidade de pressão no SI (MKS) é o <u>Pascal</u>.

$$1\,Pa = 1\,N/m^2$$

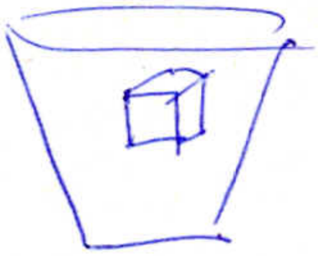
A pressão atmosférica ao nível do mar é

$$P_0 \cong 1{,}013 \times 10^5\ Pa$$

Há outras unidades muito usadas na prática, como mmHg (= altura H do barômetro em mm). No posto de gasolina se usa muito o PSI (Pounds per Square Inches), ou "Libras" como se diz.

Princípio de Arquimedes

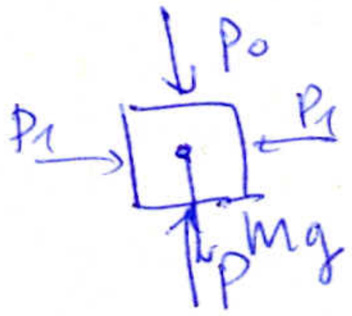
Consideremos novamente o copo com água utilizado para a demonstração da lei de variação da pressão com a altura.



Sabemos que as pressões, na parte inferior (p) e superior (p_0) se relacionam como

$$P = P_0 + \rho_{líquido} \cdot g h$$

. Vamos agora substituir esse pequeno cubo virtual, por um cubo real de um sólido (de mesmas dimensões). Obviamente, as pressões exercidas pelo fluido aos lados do cubo são as mesmas de quando o cubo era do mesmo fluido. Somente a força gravitacional agora será diferente, se a densidade do sólido for diferente da do líquido:



Agora, não haverá mais equilíbrio. A força resultante sobre o bloco será: $P_0 A + mg - PA = F_{res}$.

Mas como $P - P_0 = \rho_{liq} g h$, $(P - P_0)A = \rho_{liq} g \cdot V$ $= m_{liq} g$ ou $\boxed{F_{res} = mg - m_{liq} g}$

Onde m_{liq} é a massa do líquido que estava contida no volume V, agora ocupado pelo sólido. (= volume do líquido deslocado)

Essa força ~~resultante~~ $\boxed{m_{liq} g}$, dirigida para cima, é chamada <u>empuxo</u>

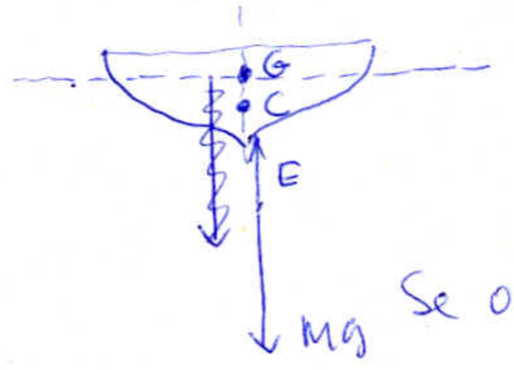
Essa relação foi obtida empiricamente por Archimedes, na Grécia, no século III AC!

Se a densidade do sólido for <u>menor</u> que a do líquido, então $mg < m_{líq.} g$ e a força resultante é para cima. Neste caso o sólido flutua no líquido, ficando somente com uma parte submersa, de tal forma que a <u>massa</u> de líquido deslocada seja menor e o empuxo equilibre o peso.

<u>Princípio de Arquimedes</u>: Todo corpo, total ou parcialmente mergulhado em um líquido, recebe uma força, de baixo para cima, denominada <u>empuxo</u> igual ao peso do líquido deslocado pelo corpo.

O empuxo é uma força volumétrica e atua no CM do ~~sólido~~ volume deslocado.

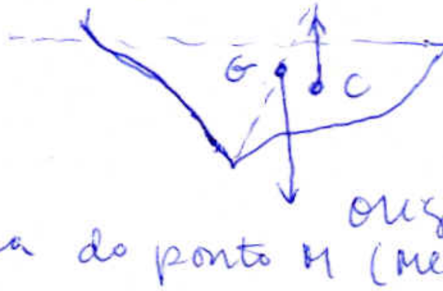
- Equilíbrio do barco.



G = Centro de Gravidade = Centro de Massa
C = Centro de Gravidade do líquido deslocado

<u>$\tau_{resultante} = 0$</u>

Se o barco se inclina.



O torque causado por C compensa o causado por G e o barco tende a voltar à posição original. <u>Entretanto</u> se o CM estiver acima do ponto M (Metacentro), p. ex. com o

pessoas ficando em pé, o barco em geral vira (10
$(\tau_G > \tau_C)$

Lei das atmosferas: Variação da pressão com a altitude.

A relação $p - p_0 = \rho g h$ não vale para um gás, já que nele, ρ não é constante. Para descobrir a relação equivalente para a atmosfera, vamos partir da relação acima p/ uma pequena diferença de altura, dh, na qual a densidade pode ser considerada constante. Neste caso, $p - p_0 = dp$ e

$$dp = \rho g dh$$

Para conveniência, vamos chamar a altura em relação ao nível do mar de z. Assim, lembrando que se a altura aumenta, a pressão diminui, teremos

$dz = -dh$, ou

$$dp = -\rho g dz$$

Para obter a variação da densidade com a pressão, vamos supor que a temperatura da atmosfera é constante (válido se para altitudes $\lesssim$ 1.-2 km) e que o ar pode ser descrito pela aproximação de gás perfeito. Então, como $PV = nRT$, p/ $T =$ cte temos:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2}$$

Multiplicando a expressão por $\frac{1}{M_m}$, $M_m =$ massa molar do ar, e como $n M_m = m$, a massa do gás, temos

$$\frac{P_1 V_1}{m_1} = \frac{P_2 V_2}{m_2} \quad \text{ou} \quad \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{P_2}{\rho_2}.$$

Tomando agora $P_1 = P_0$, $\rho_1 = \rho_0$, a pressão e densidade do ar ao nível do mar, temos

$$P = \rho \frac{P_0}{\rho_0} \quad \text{ou} \quad \rho = P \frac{\rho_0}{P_0}.$$

Substituindo na equação anterior,

$$dp = -\rho g\, dz = -p \frac{\rho_0 g\, dz}{P_0} \quad \text{ou}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{P_0} dz \quad \text{chamando } \lambda = \frac{\rho_0 g}{P_0} \ (= \text{cte})$$

$$\frac{dp}{p} = -\lambda\, dz \quad \text{ou} \quad \int_{P_0}^{P} \frac{dp}{p} = -\int_0^{z} \lambda\, dz$$

$$\text{do onde} \quad \ln \frac{P}{P_0} = -\lambda z \quad \text{ou} \quad \boxed{p = p_0 e^{-\lambda z} \quad \lambda = \frac{\rho_0 g}{P_0}}$$

A pressão atmosférica diminui exponencialmente com a altitude. Quando $z = \frac{1}{\lambda}$, $P = P_0/e = p_0 \cdot 0{,}37$. Sabemos, para os valores usuais de ρ_0, P_0, $1/\lambda \cong 8$ km.

Dinâmica de Fluidos

Vamos agora procurar as equações para descrever um ~~Fluido em movimento~~. Assim como no caso de partículas/corpos rígidos, vamos iniciar com as situações mais simples. Primeiro, vamos considerar somente fluidos ideais, isto é sem viscosidade (no final desta secção vamos falar um pouco dos efeitos da viscosidade em fluidos reais)

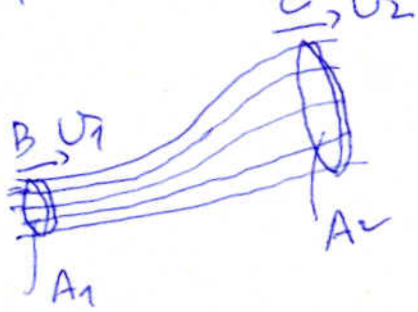
Desconsiderar a viscosidade significa desconsiderar o atrito interno que existe em todo fluido. Isso faz com que vários fenômenos corriqueiros não tenham explicação (a hélice ~~não~~ ~~girando~~ girando não consegue impulsionar o navio, p.ex).

Vamos ainda considerar somente o escoamento uniforme (i.e. - não turbulento) em fluidos incompressíveis. Também não trataremos de fluxo ou escoamento rotacional.

Linhas de Corrente

Uma linha de corrente corresponde à trajetória percorrida por uma "partícula" de fluido (um volume muito pequeno, mas que ainda contém milhões de átomos). Se o escoamento é não turbulento, (uniforme), então as linhas de corrente são fixas (embora a velocidade, em módulo e ~~sent~~ direção de uma partícula de fluido variem ao longo da linha de corrente)

Portanto, podemos definir um tubo de corrente isolando um ~~[illegible]~~ certo número de linhas de corrente que se encontram dentro de uma dada seção reta. (13



Tubo de corrente e Linhas de corrente.

Se tomarmos um pequeno intervalo de tempo Δt, supondo que a velocidade de escoamento em B seja v_1, e em C v_2, como o fluido é incompressível, o volume que atravessou B em Δt é o mesmo que atravessou C no mesmo intervalo de tempo.

$$A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t \Rightarrow \boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

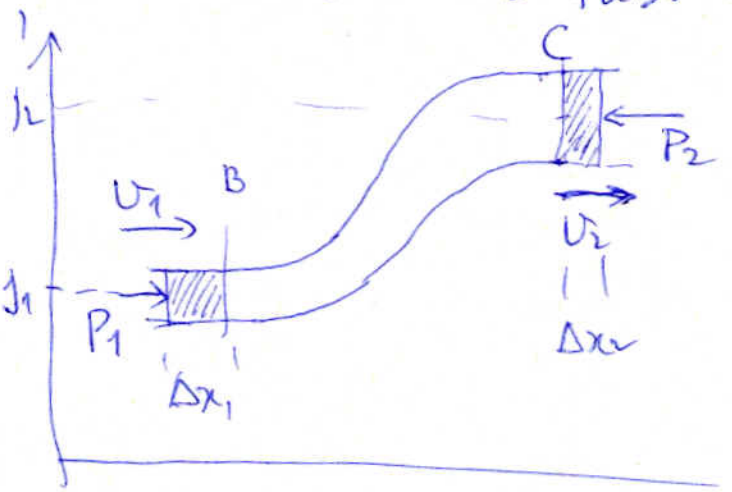
Esta equação é chamada equação de continuidade. O fluido não pode desaparecer ou "ser criado" entre B e C, portanto o que sai de B tem de chegar em C. Essa equação nos diz também que a velocidade de escoamento é maior nas partes mais estreitas do tubo, onde as linhas de corrente estão mais próximas umas das outras. Se multiplicarmos a equação de continuidade por ρ, a densidade do fluido, vemos que ela expressa também a conservação da massa:

$$A_1 v_1 \rho = m_1 \qquad A_2 v_2 \rho = m_2$$

onde m_1 = massa passando por B em Δt e
m_2 = massa passando por C no mesmo Δt.

A Equação de Bernoulli

Vamos aplicar agora a conservação de energia mecânica num fluido em movimento (já que não estamos considerando o atrito). Tomemos um fluido que escoa em um tubo, como visto na figura abaixo. Podemos definir ~~tem~~ um tubo de corrente coincidindo exatamente com o tubo físico que confina o fluido.



Sabemos que num dado Δt, o volume que sai de C é igual ao que entra em B (equação de continuidade)

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

A variação de energia cinética dessa quantidade de massa $m = A_1 v_1 \rho = A_2 v_2 \rho$ é

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

Pelo teorema trabalho-energia essa variação deve ser igual ao trabalho realizado pela resultante das forças agindo no fluido. Neste caso, temos agindo no fluido, a força gravitacional e as pressões p_1 e p_2 agindo nos 2 lados do tubo.

O trabalho realizado pela força gravitacional é

$$W_g = -mg(y_2 - y_1)$$

O trabalho realizado por p_1 é:

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 . v_1 \Delta t$$ e é positivo

Já o trabalho realizado por p_2 é contrário ao movimento do fluido:

$$W_{p_2} = - p_2 A_2 \cdot v_2 \Delta t$$

portanto, podemos escrever:

$$p_1 A_1 v_1 \Delta t - p_2 A_2 v_2 \Delta t - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

mas $A_1 v_1 \Delta t = A_2 v_2 \Delta t = V$ (volume do fluido deslocado)

$$p_1 V - p_2 V - mg(y_2 - y_1) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

ou

$$p_1 - p_2 - \rho g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

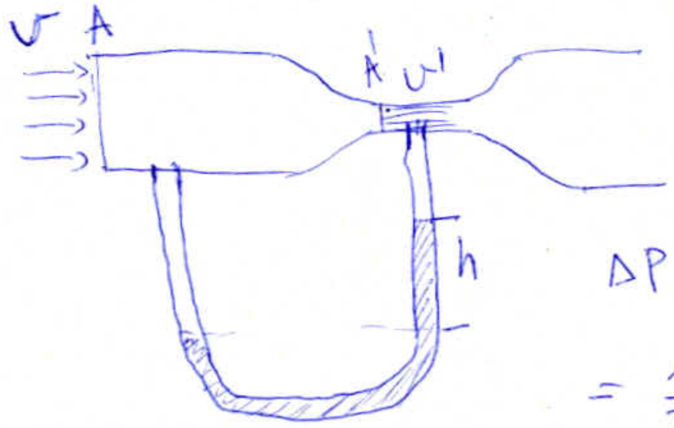
normalmente se ~~...~~ escreve a equação de Bernoulli na forma:

$$\boxed{p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2}$$

ou:

Para um fluido ideal, em escoamento uniforme, a quantidade: $p + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2$ é constante em qualquer ponto do fluido.

Um resultado interessante dessa equação é que quando a velocidade de escoamento aumenta a pressão diminui. Se você abrir uma pequena fresta no vidro da janela do carro em movimento (bem pequena, para não "perturbar" muito o fluxo) vai ver que a fumaça de um cigarro colocado próximo à fresta, vai para fora, já que a pressão dentro do carro é ≈ igual à atmosfera. Depois de algum tempo a pressão interna se iguala à externa e o fluxo de fumaça cessa. O tubo de Venturi usa a variação de pressão entre dois pontos de um tubo, um na parte larga e o outro na parte estreita, como visto na fig. abaixo, para medir a velocidade do fluido (ou p.ex. de um avião, ao qual o tubo está fixo.



$$A v = A' v'$$

$$v' = \frac{A}{A'} v$$

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho(v'^2 - v^2)$$

$$= \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A^2}{A'^2} - 1\right) v^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2A'^2 \Delta P}{\rho(A^2 - A'^2)}}} = \boxed{\sqrt{\frac{2A'^2 g h}{(A^2 - A'^2)}}}$$

Note também que a equação de Bernoulli se reduz à equação que deduzimos p/ a variação da pressão com a altitude / profundidade, no caso em que não há escoamento ($v_1 = v_2 = 0$):

$$p_2 - p_1 = \rho g h \quad (h = \text{profundidade!}) = (y_1 - y_2)$$

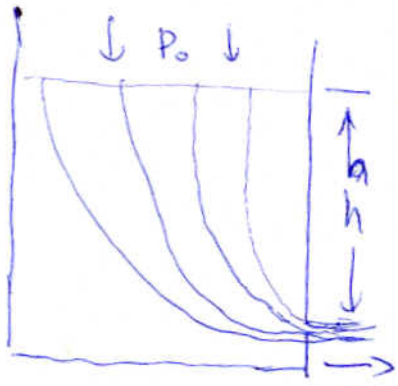
Exemplo: Velocidade da água saindo da mangueira de jardim: Mede-se a vazão R da água em uma torneira de jardim, obtendo-se 30 l em 1 minuto. Qual a velocidade da água saindo da mangueira, se ela é terminada em um orifício de 0,5 cm de diâmetro? $\boxed{R = \text{vazão} = A.v}$

$$R = \frac{30\,\ell}{60\,s} = 0{,}5\,\ell/s = 500\ cm^3/s$$

Área do jato ao sair: $A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3{,}14 \times 0{,}5^2}{4} = 0{,}2\ cm^2$

$A v = 500\ cm^3/s \qquad v = \frac{500}{0{,}2} = 2500\ cm/s = \underline{\underline{25\ m/s}}$

2) Um pequeno furo é feito na base de uma grande caixa d'água. Qual a velocidade da água ao sair?



No início, podemos considerar $h \simeq$ constante. Considerando as linhas de corrente se iniciando no topo da caixa, temos

$v_1 = 0 \quad p_1 = p_0 \quad p_2 = p_0$

$$p_2 - p_1 - \rho g (y_2 - y_1) = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

ou $\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$

e que corresponde à velocidade que a água adquire, ao cair de uma altura h.

Empuxo dinâmico

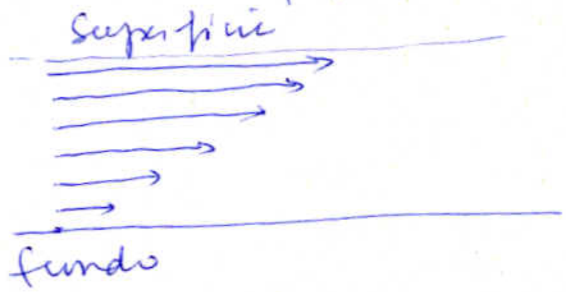
A sustentação do avião em vôo se deve aos resultados previstos na eq. de Bernoulli. As asas do avião têm um perfil que fazem com que o ar se desloque com maior velocidade na parte de cima da asa, que na parte de baixo. Assim a pressão

p_1 na parte superior se torna menor que p_0 na parte inferior, gerando um "empuxo dinâmico",

Escoamento de Fluidos Reais

Veremos aqui apenos alguns aspectos qualitativos ~~do~~ escoamento de fluidos reais (i.e. com viscosidade)

Num fluido real, podemos tratar o atrito interno, a viscosidade como uma força que age entre consecutivas "camadas" de fluido. Assim, a água de um rio tem um perfil de velocidades semelhante ao da figura abaixo

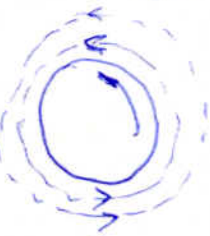


É um fato experimental que a camada de um fluido em contato com um sólido (fundo do rio), permanece em repouso ~~no~~ em relação a ele.

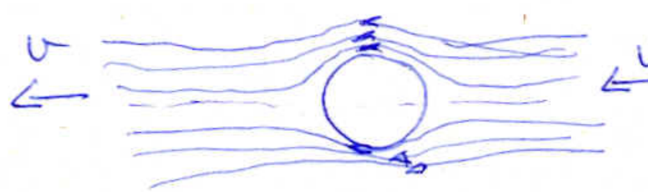
Podemos comprovar isso tentando soprar (não muito forte, para se ter ainda um escoamento não turbulento ~~[illegible]~~) uma superfície com pó de giz, e vemos que não conseguimos eliminar a poeira mais fina.

Esse tipo de escoamento não turbulento, similar ao escoamento uniforme, é chamado escoamento laminar. Essa camada primeira, ~~[illegible]~~ em contato com o sólido é tb. chamada camada limite.

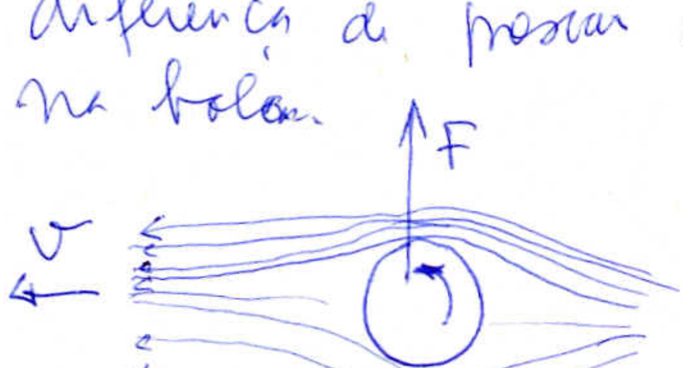
Um corolário é que todo objeto sólido se deslocando num fluido, arrasta com ele a parte da camada limite. Uma bola de futebol de tenis, baseball, etc, se forem colocados em rotação, produzirão um movimento rotacional do ar em sua volta. Quanto mais próximo à bola, maior a velocidade do ar em relação à bola. (19



Se imaginarmos agora, além da rotação da bola, também um fluxo de ar, da direita para a esquerda temos



Somando agora os dois efeitos (fluxo de ar + rotação da bola), vemos que no lado de cima, a velocidade do fluido, devido a rotação é no mesmo sentido da velocidade de escoamento do fluido, portanto, aumentando a velocidade do fluido nas proximidades da bola. Já na parte de baixo ocorre o oposto; fazendo diminuir a velocidade do fluido.
Portanto, pela eq. de Bernoulli, aparecerá uma diferença de pressão ou uma força para cima na bola.



Este é o chamado Efeito Magnus usado em vários esportes, como no futebol, para produzir "efeitos" na trajetória da bola. No caso de um chute/tacada, o ar está parado e a bola (girando) se deslocando com velocidade $\vec{v}$ na

direção oposta à ~~d~~ indicada por $\xleftarrow{v}$ na figura. Veja na internet (~~[illegible]~~) vários exemplos de chutes com efeito, em particular um famoso gol de falta do Roberto Carlos, na copa do mundo de 1998 (procure Magnus, Roberto Carlos - tem um video no youtobe).
Bernoullis