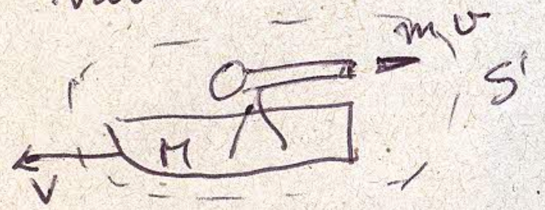
Massa Variável

Como já dissemos, a formulação original e a mais completa da 2ª lei de Newton é escrita como

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

Essa forma inclui a descrição de sistemas com massa variável, como por exemplo a propulsão de foguetes. Vamos agora descrever o movimento de sistemas desse tipo. Consideremos inicialmente, uma metralhadora sobre um barco, solto em um lago de águas tranquilas. Vamos ignorar os atritos entre o barco e a água e também entre ele e o ar.



A cada tiro, o barco aumenta sua velocidade em relação à água. Chamando de M a massa do barco (incluindo as balas ñ disparadas) e m a massa da bala disparada, temos para o sistema S' (barco + bala disparada (não há forças externas). Antes desse 1º disparo, o barco estava em repouso em relação à água.

$$MV = mv \Rightarrow \boxed{V = \frac{m}{M}v}$$

$$\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} = 0\right)$$

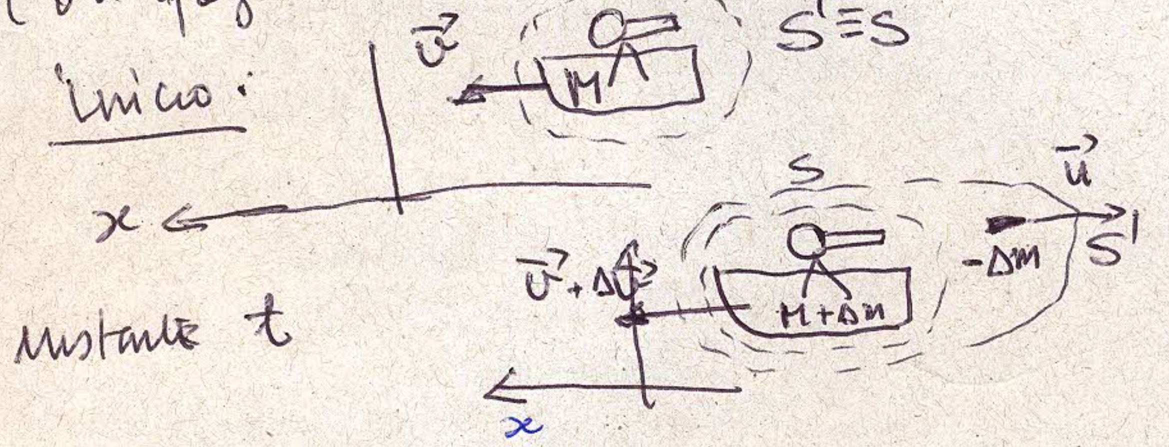
O disparo de uma segunda bala pode ser descrito de maneira semelhante.

$$P_i = MV \qquad P_f = (M-m)V' - mv$$

$$\boxed{V' = \frac{M}{M-m}V + \frac{m}{M-m}v}$$

No caso de um foguete, uma reação química queimando o combustível (+ oxidante) produz um fluxo de gases em alta velocidade sendo ejetado do foguete. Cada molécula ejetada equivalendo a uma bala atirada. Neste caso, como a massa de cada "projetil" é muito pequena, podemos usar a aproximação de fluxo contínuo.

No diagrama, usaremos o barco + metralhadora para facilitar o entendimento, mas sabendo que podemos fazer o limite $\Delta m \to 0$, para o caso do foguete. Para produzir um resultado + geral, vamos supor a existência de uma força externa agindo no sistema S (barco + bala). Vamos chamar tb de sistema S, o barco + balas ñ disparadas (ou foguete + combustível e oxidante ñ queimados).



A massa da bala é $-\Delta m$. Vamos considerar ΔM como uma grandeza negativa (isto é $\frac{dm}{dt} < 0$, ou seja a massa do barco diminui com o tempo.

$$\vec{P}_i = M\vec{v} \quad ; \quad \vec{P}_f = (M+\Delta M)(\vec{v}+\Delta\vec{v}) + (-\Delta m\,\vec{u})$$

Para o sistema S', que está sob a ação de uma força externa $\vec{F}_e$,

$$\vec F_{ext\,res} = \frac{d\vec P}{dt}$$

mas $\Delta\vec p = \vec P_f - P_i = (M+\Delta m)(\vec v + \Delta\vec v) - \Delta m\,\vec u - M\vec v$

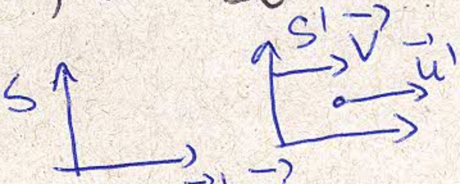
$= \cancel{M\vec v} + M\Delta\vec v + \Delta m\,\vec v + \Delta m\,\Delta\vec v - \Delta m\,\vec u - \cancel{M\vec v} =$

$= M\Delta\vec v + \Delta m(\vec v - \vec u) + \Delta m\,\Delta v$

÷ por Δt e fazendo o limite $\Delta t \to 0$:

$$\frac{d\vec P}{dt} = M\frac{d\vec v}{dt} + \frac{dM}{dt}(\vec v - \vec u)$$

(note que $\lim_{\Delta t\to 0} \Delta m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$, pois $\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow$ para valor constante ($\vec a$) e $\Delta m \to 0$)



$\vec u = \vec u' + \vec V$

$\Rightarrow \vec u' = \vec u - \vec V$

portanto,
$$M\frac{d\vec v}{dt} = \vec F_{ext} + \vec v_{rel}\frac{dM}{dt}$$

onde $\vec v_{rel} = \vec u - \vec v$ é a velocidade da bala (dos gases do foguete) <u>em relação</u> ao barco (ao foguete).

Note que estamos considerando $\vec v$ e $\frac{d\vec v}{dt}$ como grandezas positivas. Assim $\vec v_{rel}$ (que é na direção oposta) será negativo. O mesmo com $\frac{dM}{dt}$, que é <0. Portanto, $\vec v_{rel}\frac{dM}{dt} > 0$ e <u>acelera</u> o foguete.

Para um foguete se movimentando no espaço, na ausência de forças externas,

$$M\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt} = -v_e\frac{dm}{dt} \quad (v_e = |V_{rel}|)$$

$\vec{V}_{rel}\frac{dM}{dt}$ [unidade $\frac{m}{s}\cdot\frac{kg}{s} = kg\cdot m/s^2 \equiv N$]

é chamada <u>empuxo</u>. $|V_{rel}|$ é também chamada <u>velocidade de escape</u> (v_e) dos gases do foguete e em geral é aproximadamente constante. Também, a velocidade de reação química de queima de combustível (dM/dt) é ≈ constante e portanto o empuxo de um foguete é ≈ constante. Porém, note que ~~...~~ mesmo assim a <u>aceleração</u> do foguete não será constante, pois M <u>diminui</u> com o tempo. Na ausência de forças externas,

$$M\,dv = V_{rel}\,dM \Rightarrow \frac{1}{V_{rel}}\int_{v_0}^{v} dv = \int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

$$\frac{1}{V_{rel}}(v - v_0) = \ln\frac{M}{M_0}$$

$$v = v_0 + V_{rel}\ln\frac{M}{M_0}$$ (lembre-se de que V_{rel} é < 0!)

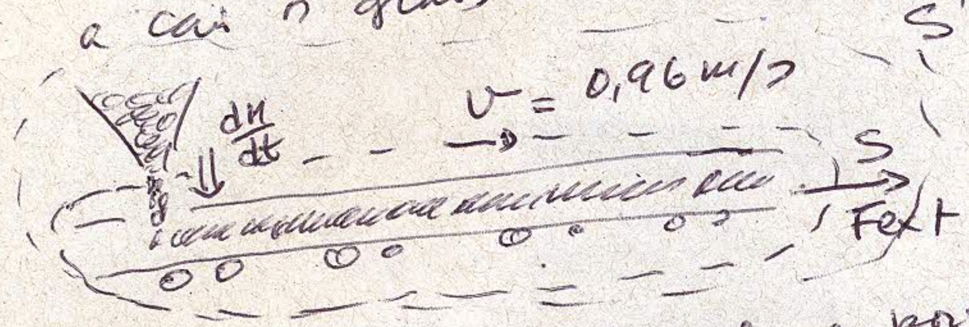
e portanto

$$V_{rel}\ln\frac{M}{M_0} > 0 \quad (M < M_0!)$$

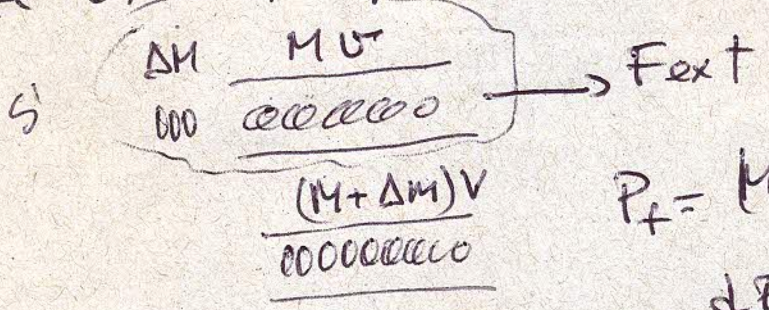
Exemplos

Esteira transportando grãos:

- grãos caem c/ fluxo constante de 0,31 kg/s
- esteira é longa. O cálculo se refere a ~~tempo~~ um intervalo de tempo menor que o p/ começar a cair os grãos do outro lado da esteira



- O sistema S' inclui o silo e portanto nesse sistema a massa é constante (= foguete + gases de escape)
- como os grãos caem verticalmente, $u_x = 0$ e portanto $V_{relat} = -v$ (se vc estivesse sentado na esteira, veria a areia caindo se afastar)
- neste caso, $\frac{dM}{dt} > 0$ pois a massa da esteira (foguete) aumenta com o tempo.



$$P_i = Mv + \Delta M \cdot 0$$

$$P_f = (M + \Delta M) v$$

$$\Delta P = P_f - P_i = \Delta M v \implies \frac{dP}{dt} = v \frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = F_{ext} \implies F_{ex} = 0{,}31 \times 0{,}96 \cong 0{,}3\,N$$

(Essa força serve p/ acelerar ΔM de 0 a 0,96 m/s) ~~e depois prossegue com v~~.

Modelos de foguete!

Motor C-5

propulsão : 5.6 N | 12,7 g de Combustível
(empuxo) | $m_0 = 25,5$ g
| $\Delta t = 1,9$ s

Foguete + motor : $M_i = 53,5 + 25,5 = 79$ g

? $v_e = ?$ $v_f = ?$

$v_{rel} \frac{dM}{dt} = 5.6$ N $\quad \frac{dM}{dt} = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{-12,7 \times 10^{-3}}{1,9} = -6,7 \times 10^{-3}$ kg/s

$v_{rel} = -\frac{5.6}{6,7} \times 10^3 \cong 790$ m/s

$v_f = v_i + v_e \ln \frac{M_f}{M_i} = 0 + 790 \ln \frac{\overbrace{79-12,7}^{66,3}}{79}$

$v_f = 142$ m/s

(supondo o modelo ser lançado do espaço!)

veja em minhas páginas pessoais de internet (em download, a solução do problema p/ esse foguete, sob a ação da gravidade)

Foguete SATURNO V (missão à lua)

$M_0 = 3000$ t

Empuxo: (1º estágio): 32×10^6 N (150 s)

Carga útil (missão à lua): 47 t

$\frac{47}{3000} = 1,5\%$ | 15 foguetes — 7 US\$ bilhões (1970)
| 1 foguete = 0,5 bilhões
| = ≃ 3 bilhões US\$ atuais

Gota de chuva dentro da nuvem

O problema de uma pequena gota de chuva, que ao cair dentro da nuvem vai agregando massa é similar ao problema da esteira de cereais que discutimos anteriormente, ou seja a massa agregada tem momento inicial $= 0$ ($u = 0$)
A força externa sobre a gota (desprezando-se efeitos de atrito) é $= mg$:

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$ onde v é a velocidade da gota (ver problema da esteira).

Supondo que a massa da gota seja proporcional à distância percorrida dentro da nuvem:
$m = kx$. Portanto $\frac{dm}{dt} = kv$ a eq. do movimento da gota é então:

$$mg = m\frac{dv}{dt} + v.kv \quad (\div k) \; (e \text{ com } \frac{m}{k} = x)$$

$$x.g = x\frac{dv}{dt} + v^2$$

essa equação diferencial ñ é simples de resolver, mas pode-se mostrar que admite uma solução bastante simples:

$v(t) = at$, com $a = cte$.

Como $\frac{dx}{dt} = v \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}at^2$. Subst. na eq. vemos que:

$$\frac{1}{2}at^2 g = \frac{1}{2}at^2 . a + a^2t^2$$

ou

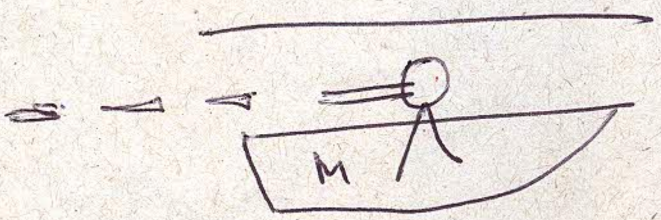
$$g = a + 2a = 3a$$

$$\Rightarrow \quad a = g/3 = 3{,}3\ m/s^2$$

~~dep~~ Supondo que a gota permaneça por 3 segundos dentro da nuvem, ~~sso~~ ela percorrerá uma distância

$$x = \frac{1}{2} \cdot 3{,}3 \times 9 \simeq 15\ m \quad \text{dentro da nuvem}$$

p/ $k = 2\ g/m$, a gota terá $m \simeq 30\ g$ ao deixar a nuvem.



$m_0 = 300\ kg$

$120/s$ bala $= 10\ g$

$v_{bala} = 1000\ m/s$

$$m \frac{dv}{dt} = -v_e \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1{,}2\ kg}{60\ s} = 0{,}02\ kg/s$$

3 min: $\Delta m = 3{,}6\ kg$

$$v_f = v_i - v_e \ln \frac{m_f}{m_i}$$

$$v_f = -1000 \ln \frac{300 - 3{,}6}{300} = -1000 \ln 0{,}988 = 12\ m/s$$

$$\underline{v_f = 43\ km/h}$$