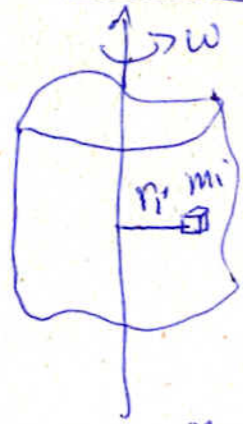
Momento de Inércia



Um corpo rígido, girando em torno de um eixo com velocidade angular $\vec{\omega}$, tem sua energia cinética dada por:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Como $v_i = \omega r_i$,

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega$$

O termo $\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ é chamado <u>momento de inércia</u>, o equivalente da <u>massa</u> (inércia) nas translações.

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Para um corpo de densidade $\rho(\vec{r})$, fazendo-se $m_i = \Delta m$, $\Delta m_i = \rho(\vec{r}) \cdot \Delta V$, com $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ sendo o volume do pequeno cubo correspondente a Δm:

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \rho(\vec{r}_i) r_i^2 \Delta V$$

fazendo-se o $\lim_{\Delta V \to 0}$, $I = \int r^2 \rho(\vec{r})\, dV$

ou

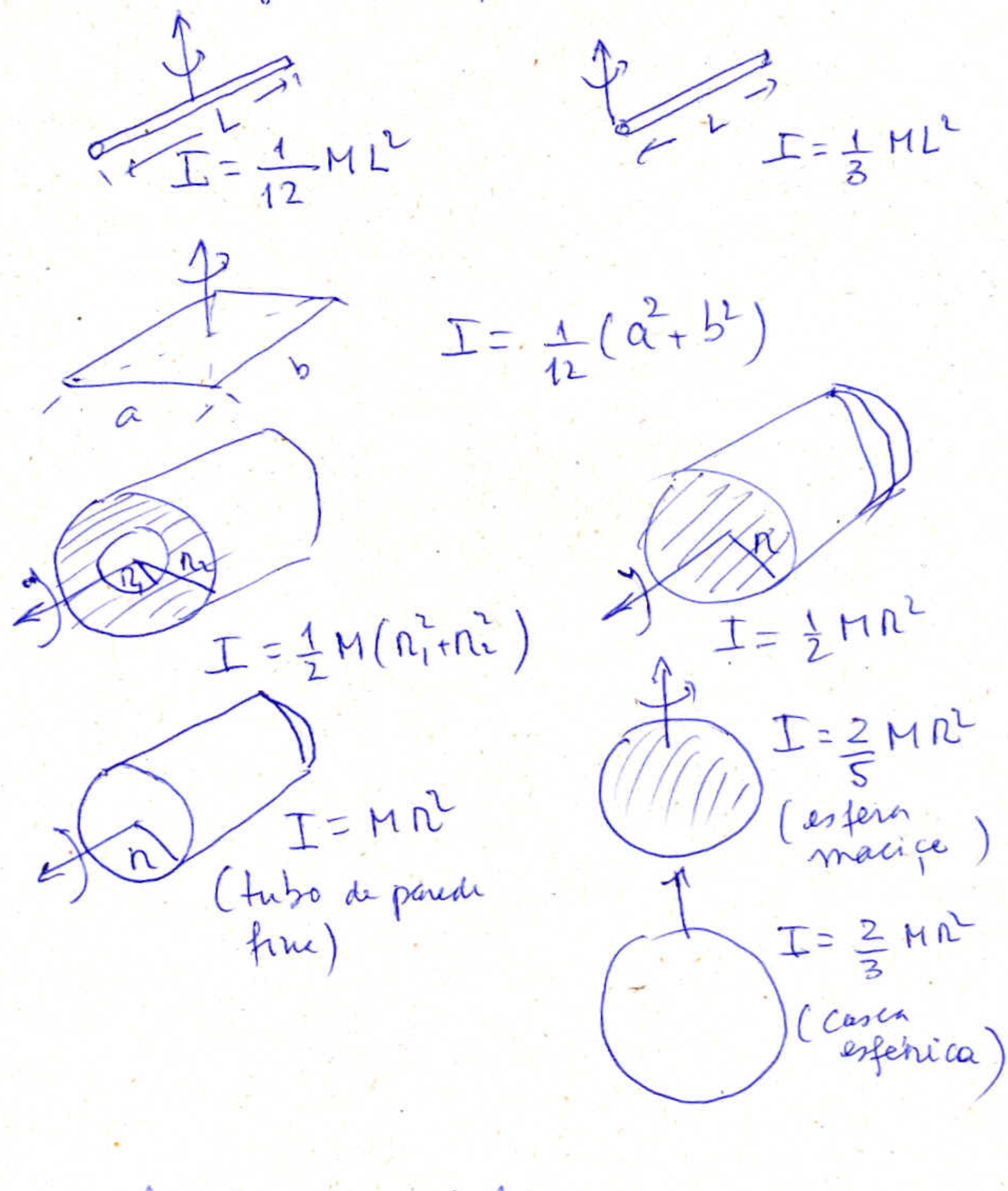
$$I = \int \rho(x,y,z)\, r^2\, dV$$

soma todo o volume do corpo rígido

Note que $\lim_{\Delta m \to 0} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i$

$$\boxed{= \int r^2\, dm}$$

Para corpos com densidade uniforme e geometria simples, I pode ser facilmente obtido:



$I = \frac{1}{12} ML^2$

$I = \frac{1}{3} ML^2$

$I = \frac{1}{12}(a^2 + b^2)$

$I = \frac{1}{2} M(r_1^2 + r_2^2)$

$I = \frac{1}{2} M r^2$

$I = M r^2$ (tubo de parede fina)

$I = \frac{2}{5} M r^2$ (esfera maciça)

$I = \frac{2}{3} M r^2$ (casca esférica)

Teorema dos eixos paralelos

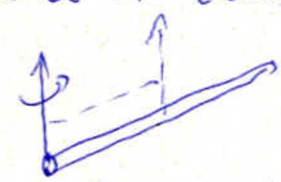
Seja I_{cm}, o momento de inércia de um corpo rígido, em relação a um eixo passando por seu centro de massa. Então, o momento de inércia I, em relação a um eixo paralelo ao anterior é dado por:

$$\boxed{I = I_{cm} + Md^2},$$

onde $\underline{d}$ é a distância entre os dois eixos.

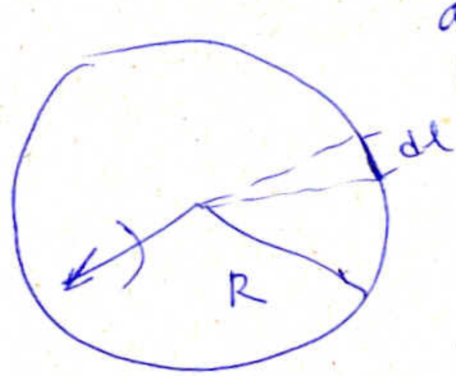
Ex.

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$$



$$I = I_{cm} + Md^2$$
$$= \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{12}ML^2 + \frac{3}{12}ML^2 = \underline{\frac{1}{3}ML^2}$$

Exemplo: Anel de raio R e densidade linear $\lambda = cte$, em relação a um eixo $\perp$ ao plano do anel, passando por seu eixo



$$I = \int R^2 dm \qquad dm = \lambda dl$$

$$I = \int R^2 \lambda \, dl = R^2 \lambda \int dl$$
$$= R^2 \lambda \, 2\pi R$$

mas $M = 2\pi R \lambda$

$$\Rightarrow \boxed{I = MR^2}$$

(= ao do tubo)

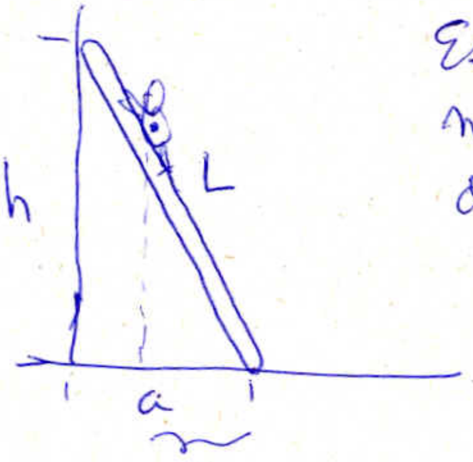
Equilíbrio de um corpo rígido.

Um corpo rígido estará em equilíbrio, se:

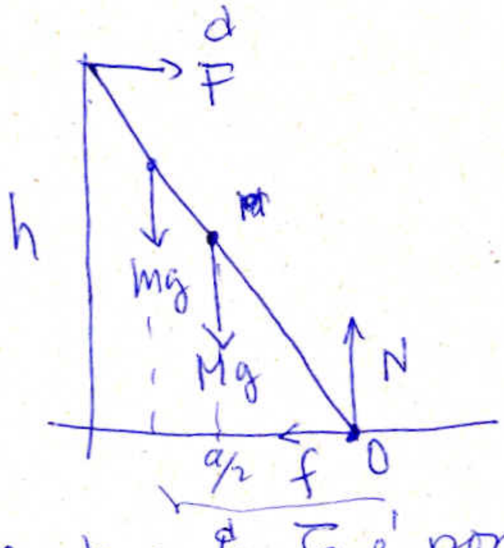
$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \quad e \quad \sum \vec{\tau}_{ext} = 0.$$

(em relação a $\forall$ ponto O)

Não vamos nos aprofundar nos problemas de equilíbrio de corpos rígidos (estática), mas apenas ver alguns exemplos.



Escada de comprimento L e massa M apoiada na parede sem atrito e com coef. de atrito μ_e entre o piso e a escada. Sobre ela, uma pessoa de massa m.



$$\sum \vec{F} = 0 \quad \begin{cases} (M+m)g = N \\ F = f = \mu_e N \end{cases}$$

$\sum \vec{\tau} = 0$ (escolhendo o ponto O ~~em relação ao~~ no pto de aplicação de N e f)

(lembrando τ é positivo se produz rotação anti-horária

$mgd + Mg\frac{a}{2} = F.h$ Temos então o conjunto de equações:

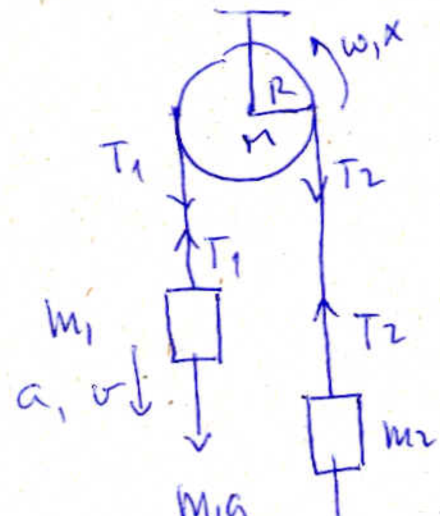
$$\begin{cases} (m+M)g = N \\ F = f \\ (M\frac{a}{2} + md)g = F.a \end{cases}$$

Com incógnitas N, F, f

$(f_{max} = \mu_e N)$

Dinâmica de Rotações

Vamos agora ver alguns problemas clássicos de aplicação de Leis de Newton, envolvendo roldanas, polias, etc., mas agora considerando sua massa.



Se o fio não escorrega na roldana, então um ponto da extremidade da roldana deve ter a mesma velocidade v e mesma aceleração $a_T = a$ que as massas m_1 e m_2:

$$v = \omega R \quad e \quad a = \alpha R$$

$$\begin{cases} m_1 g - T_1 = m_1 a \\ T_2 - m_2 g = m_2 a \\ \tau_{res} = I\alpha = T_1 R - T_2 R \end{cases}$$

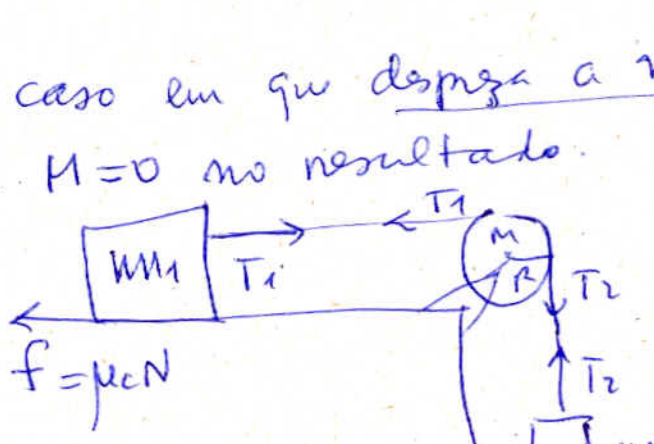
Com $I = \frac{1}{2}MR^2$ e $\alpha = \frac{a}{R}$, $(T_1 - T_2) = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a}{R^2} = \frac{1}{2} M a$

$$(m_1 - m_2) g - (T_1 - T_2) = (m_1 + m_2) a$$

$$(m_1 - m_2) g = \left(m_1 + m_2 + \tfrac{1}{2}M\right) a \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}\, g}$$

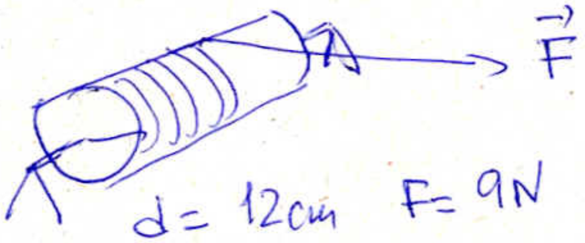
Note que o caso em que despreza a massa da polia corresponde a $M = 0$ no resultado.

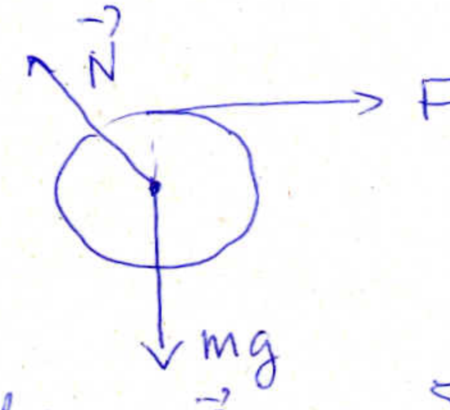
O caso:



É análogo ao que resolvemos acima.

Desenrolando cabo (tirando o minério do poço...)





$d = 12cm$ $F = 9N$
$M = 50kg$

- Não há translação do cilindro, $\Rightarrow \vec{a}_{cm} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = 0$

$\Rightarrow \vec{N} + \vec{F} + M\vec{g} = 0$

- Em relação ao eixo de rotação, somente $\vec{F}$ produz torque.

$$\tau_{res} = I\alpha = \frac{1}{2}M\left(\frac{d}{2}\right)^2\alpha = \frac{d}{2}F$$

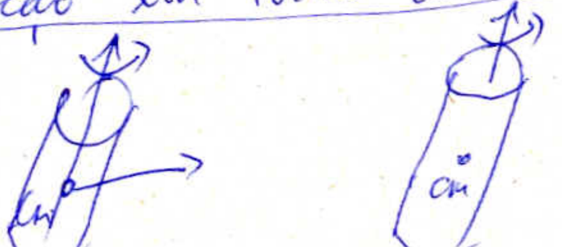
$$\alpha = \frac{F}{\frac{1}{2}Md} = \frac{\tau}{I}$$

$$\tau = F \cdot \frac{d}{2} = 9 \times 0{,}\frac{12}{2} = 0{,}54\,N.m$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 0.06^2 = 0.09\ kg.m^2$$

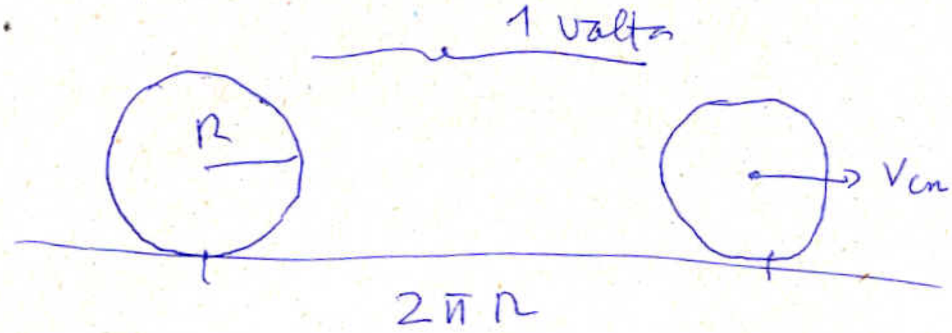
$$\alpha = \frac{0.54}{0.09} = 6\ rd/s^2$$

<u>Rotação em torno de um eixo móvel.</u>



$$E_c = \underbrace{\frac{1}{2}MV_{cm}^2}_{\text{Translação}} + \underbrace{\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}_{\text{rotação}}$$

Caso particular: <u>Rolamento</u>: (rodando sem deslizar sobre uma superfície)



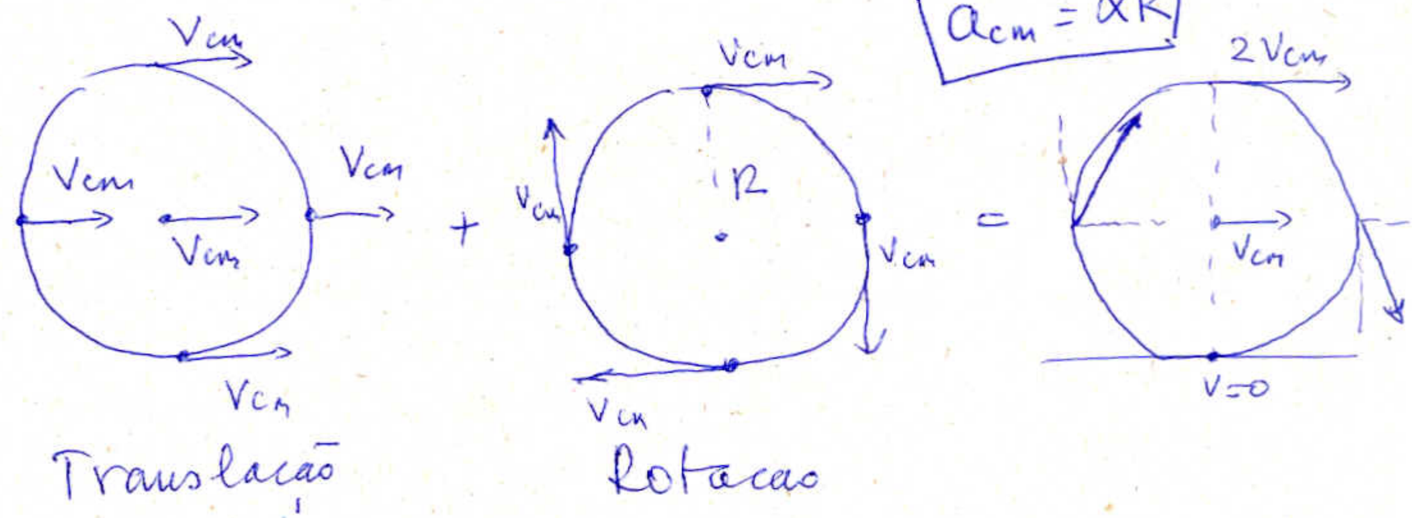
T = período = tempo p/ roda 2π rd

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ $\quad 2\pi R = V_{cm} \cdot T \Rightarrow \boxed{V_{cm} = \frac{2\pi}{T} R = \omega R}$

$\frac{dV_{cm}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$

$\boxed{a_{cm} = \alpha R}$

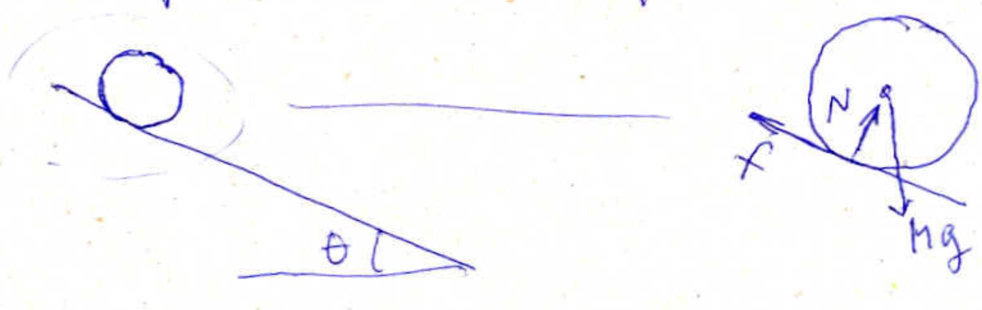
Decomposição:

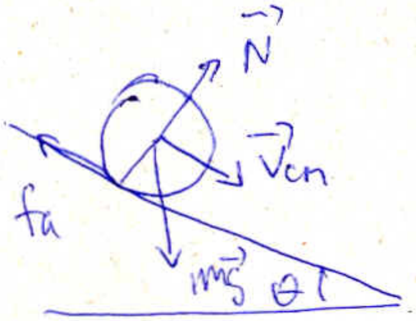


$$E_c = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \frac{V_{cm}^2}{R^2}$$

$$U = M g y_{cm}$$

<u>Exemplo</u>: Competição entre corpos de mesma massa M e mesmo raio R descendo uma rampa inclinada: quem vence?





Torque é dado pela força de atrito.

$\boxed{V_{cm} = \omega R}$ ← rolamento

$\boxed{a_{cm} = \alpha R}$

$\tau_{res} = I\alpha \qquad \tau = f_a \cdot R$

$$\begin{cases} mg\,\text{sen}\,\theta - f_a = ma \\ f_a \cdot R = I \dfrac{a}{R} \end{cases}$$

$I = k\,MR^2$ (k depende da geometria do corpo rolando: cilindro cheio $k = \frac{1}{2}$ esfera: $k = \frac{2}{5}$

$$f_a = k\,MR^2 \frac{a}{R^2}$$

$$\boxed{f_a = k\,Ma}$$

$$mg\,\text{sen}\,\theta = ma + kMa = (k+1)\,ma$$

$$\boxed{a = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{k+1}}$$

⇒ quanto menor o k (menor o I) maior a aceleração do corpo.

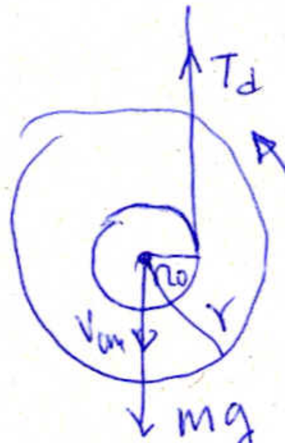
p. ex.

esfera: $k+1 = \frac{7}{5}$ $\quad a = \frac{5}{7} g\,\text{sen}\,\theta$

tubo $k = 1$ $\quad a = \frac{g}{2}\,\text{sen}\,\theta$

Ioiô

- O movimento do ~~ioiô~~ ioiô é do tipo <u>rolamento</u>. Quando o ioiô dá uma volta completa, a corda se desenrola $2\pi r_0$ e portanto o ioiô (seu centro de massa desce uma distância igual) portanto, $\boxed{V_{cm} = \omega r_0}$



<u>descida</u>: $[\tau > 0, \omega > 0]$

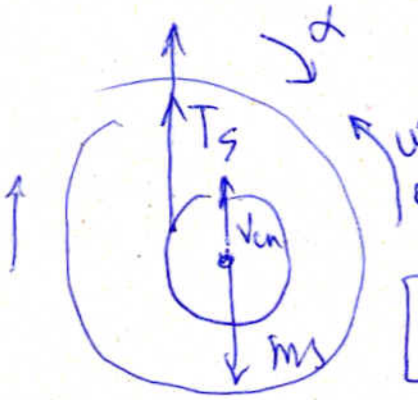
$$\begin{cases} mg - T_d = m a_{cm} \\ T_d r_0 = I\alpha = I \dfrac{a_{cm}}{r_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_d = I \frac{a_{cm}}{r_0^2} \Rightarrow mg - \frac{I a}{r_0^2} = ma$$

$$mg = a\left(m + \frac{I}{r_0^2}\right) = ma\left(1 + \frac{I}{m r_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{g}{1 + \frac{I}{m r_0^2}}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{g}{r_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{I}{m r_0^2}\right)}}$$

Subida



$$T_s - mg = ma$$

$$-T_s \cdot r_0 = I\alpha \qquad T_s = -\frac{I\alpha}{r_0}$$

$[\tau < 0, \omega > 0]$

$$\Rightarrow -mg = \left(m\cancel{g} + \frac{I\alpha}{r_0}\right)a$$

$$\Rightarrow a = -\left(\frac{g}{1 + I/m r_0^2}\right)$$

- Em geral, a massa do eixo central do ioiô é muito menor que a massa dos 2 discos. desprezando-se a massa do eixo, $I = \frac{1}{2} m r^2$ e então:

$$\boxed{\alpha = \pm \frac{g}{r_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{2r_0^2}\right)}} \quad \left(\begin{array}{l} + \rightarrow \text{descida} \\ - \rightarrow \text{subida} \end{array}\right)$$

$$\boxed{a = g \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{2r_0^2}\right)}} \quad \text{e} \quad \left\{\begin{array}{l} v_{desc} = at \\ v_s = v_0 - at \end{array}\right\}$$

Momento Angular.

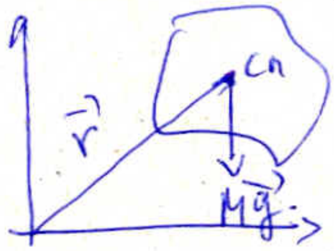
Já vimos que, na forma ou em termos das variáveis rotacionais, a 2º lei de Newton para um corpo rígido pode ser escrita como:

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{onde} \quad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = I\vec{\omega}$$

é o momento angular.

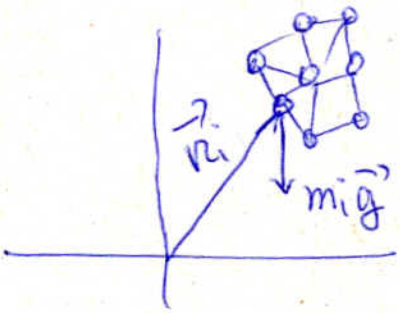
Torque resultante da força gravitacional

- O torque resultante da ação da força peso sobre um corpo rígido, pode ser calculado considerando-se como se toda a massa do corpo rígido estivesse concentrado em seu CM.



$$\vec{\tau}_{res} = M\vec{r}\times\vec{g}$$

para demonstrar, consideremos um corpo rígido formado por um conjunto de n massas puntiformes:



para cada massa m_i,

$$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i\times(m_i\vec{g}) = m_i\vec{r}_i\times\vec{g}$$

Somando todos os torques $\vec{\tau}_i$ temos o torque resultante:

$$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^{n}\tau_i = \sum m_i\vec{r}_i\times\vec{g} = \left(\sum m_i\vec{r}_i\right)\times\vec{g}$$

$$= \boxed{M\vec{r}_{cm}\times\vec{g}} = \boxed{\vec{r}_{cm}\times\vec{P}}$$

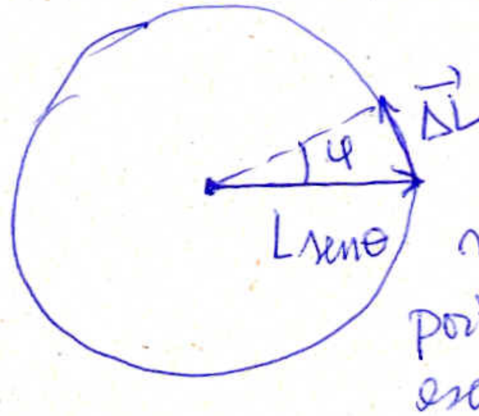
Rotação de um pião

Se um pião é posto para girar, com o eixo de rotação na vertical, com o CM coincidindo com o eixo de rotação, então o torque resultante será nulo e $\vec{L} = cte$.

Entretanto, se o eixo de rotação é inclinado em relação à vertical,

$\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$. Esse torque será perpendicular ao papel, entrando nele. Como $\vec{L}$, nesse instante está no plano do papel, o torque resultante é perpendicular a $\vec{L}$. Portanto, com $\vec{\tau} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t}$, $\Delta\vec{L}$ será perpendicular a $\vec{L}$. Isso faz com que somente a direção de $\vec{L}$ se altere e o pião faz um movimento de precessão em torno do eixo vertical, pois em qualquer instante $\vec{\tau}$ será sempre $\perp$ a $\vec{L}$.

A velocidade angular da precessão, ω_p pode ser calculada, observando-se o movimento visto de cima



o vetor $\Delta\vec{L}$ e a projeção horizontal de $\vec{L}$, L sen θ estão no mesmo plano. Portanto, podemos escrever: $(L\,\mathrm{sen}\,\theta)\cdot\Delta\varphi = \Delta L$

$\div$ a expressão por Δt e fazendo o limite p/ $\Delta t \to 0$: 13

$$L.\operatorname{sen}\theta . \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow L \operatorname{sen}\theta . \omega_p = \frac{dL}{dt}$$

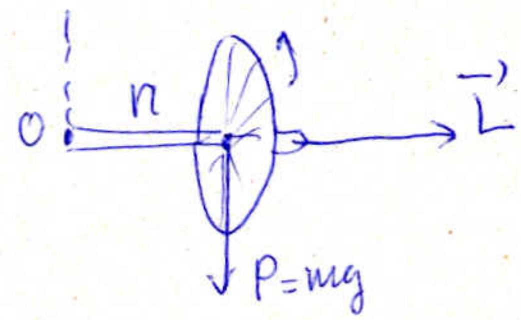
Mas $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{res} = \vec{r}_{cm} \times M\vec{g} \Rightarrow \left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = \frac{dL}{dt} =$
$= r_{cm} . \operatorname{sen}\theta \, Mg$

$\Rightarrow$

$$L \operatorname{sen}\theta \, \omega_p = r_{cm} \operatorname{sen}\theta \, Mg$$

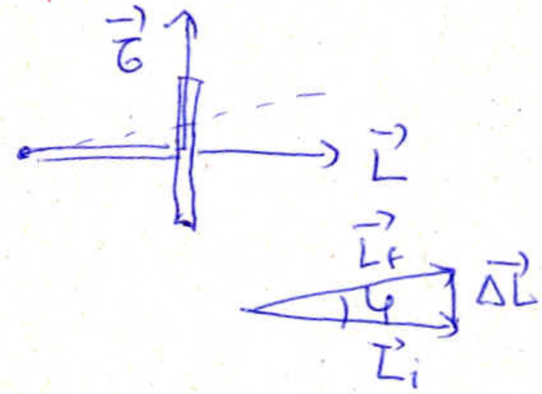
$$\Rightarrow \boxed{\omega_p = \frac{r_{cm} Mg}{L}}$$

O mesmo argumento pode ser utilizado para a demonstração da roda de bicicleta. Neste caso, $\theta = 90 \Rightarrow L \operatorname{sen}\theta = L$



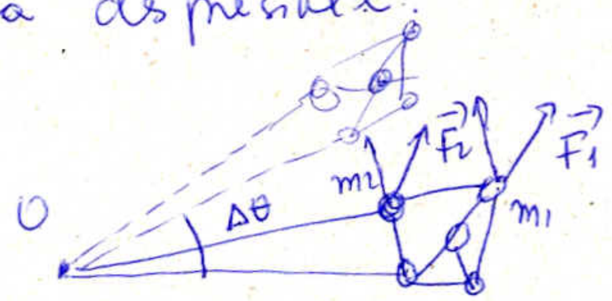
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{P} = m\vec{r} \times \vec{g}$$

Visto de cima:



Trabalho e Potência Nas Rotações

- Vamos tomar um corpo rígido constituído de alguns massas ligadas por barras de massa desprezível.



Supondo que em cada massa m_i atue uma força $\vec{F}_i$. O trabalho realizado para girar o corpo rígido de um ângulo $d\theta$ é o trabalho realizado pelas Forças p/ deslocar cada massa de uma distância $ds_i = r_i \, d\theta$

$dW_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{ds}_1 = F_{1\perp} \cdot ds_1$, ($F_{i\perp}$ = Componente de $\vec{F}_i$ ∥ a $\vec{ds}_i$, ou seja ⊥ ao raio r_i)

$dW_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{ds}_2 = F_{2\perp} \cdot ds_2$

$\vdots$

$$dW = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{ds}_i = \sum F_{i\perp} \cdot r_i \, d\theta$$

mas $\sum F_{i\perp} \cdot r_i = \tau \Rightarrow \boxed{dW = \tau \, d\theta}$ (τ = torque em relação ao eixo de rotação)

Note que essa expressão pode se escrita como $dW = \vec{\tau} \cdot \vec{d\theta}$, já que $\vec{\tau}$ é ∥ a $\vec{d\theta}$ (ambos na direção do eixo de rotação)

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau \, d\theta$$

se τ = constante $\Rightarrow$ $\boxed{W = \tau(\theta_2 - \theta_1)}$

Usando a relação p/ um corpo rígido:

$$\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$W = \int \tau \, d\theta = \int I\alpha \, d\theta = I \int \frac{d\omega}{dt} \cdot d\theta = I \int d\omega \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

ou

$$W = I \int \omega \, d\omega = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) =$$ variação da energia cinética de rotação

"O trabalho do torque resultante é igual à variação de energia cinética de rotação"

Potência

da relação $dW = \tau . d\theta$; $(\div dt)$

temos $\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \boxed{P = \tau . \omega}$