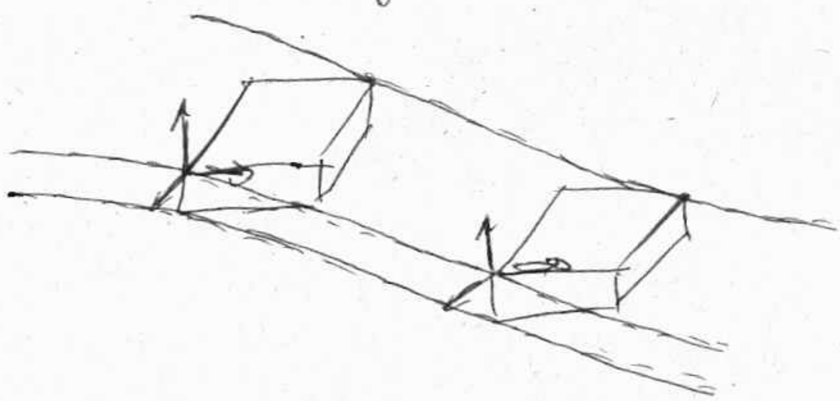
Corpos Rígidos

1

Definição: Sistema de partículas no qual a distância $\vec{r}_{ij}$ entre qualquer par de partículas é sempre fixa.

O movimento mais geral de um corpo rígido pode ser sempre decomposto em uma translação e uma rotação.

Translação: Quando a direção de qualquer segmento de reta unindo dois pontos do corpo rígido não se altera durante o movimento. Todos os pontos de um corpo rígido descrevem trajetórias paralelas.



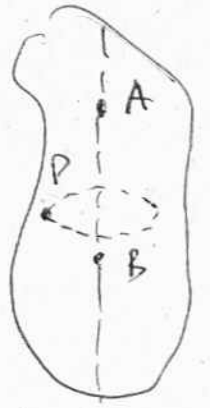
Para se descrever a translação de um corpo rígido, basta descrever ~~o~~ ~~do~~ movimento de um de seus pontos (p. ex. a translação do Centro de Massa)

Rotação: ~~Se~~

a) Rotação em torno de um eixo

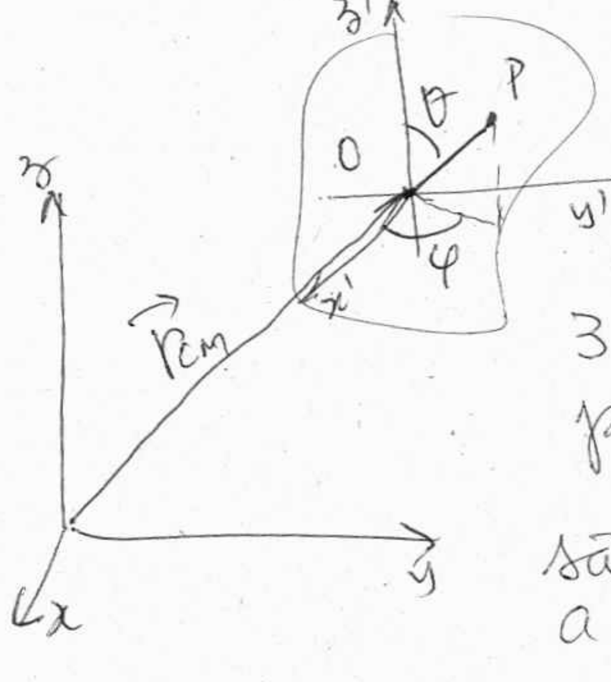
- Se fixarmos dois pontos (A, B) em um corpo rígido, estaremos fixando todos

Os pontos pertencentes ao segmento de reta AB. O único movimento possível para os pontos fora desse segmento é o de um movimento circular em torno do eixo $\overline{AB}$



A rotação em torno de um eixo pode ser descrita em termos de um único parâmetro, o ângulo de rotação (θ)

b) Rotação em torno de um ponto: Se fixarmos um único ponto (O) de um corpo rígido, qualquer outro ponto P do mesmo poderá se mover sobre a superfície de uma esfera de raio R igual à distância $\overline{OP}$. Esse é o tipo mais geral de uma rotação e a posição de P pode ser sempre descrita em termos de dois parâmetros (θ, φ - latitude e longitude)



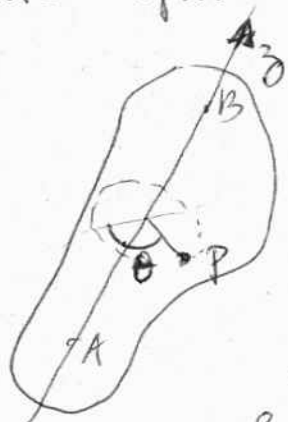
Para se especificar completamente a posição de um corpo rígido no espaço, precisamos de 6 ~~três~~ parâmetros: 3 (x,y,z) para especificar a posição do ponto O (em geral o centro de massa). Esses são as coordenadas que descrevem a translação do corpo rígido.

A orientação do corpo rígido é descrita com mais três parâmetros. Dois deles são os θ e φ (latitude e longitude) como visto na figura. O último seria o ângulo que o eixo z' faz com o eixo z. Dizemos que um corpo rígido tem 6 graus de liberdade.

Graus de Liberdade: Uma partícula tem 3 graus de liberdade de movimento. Uma formiga se movimentando na superfície de uma bola de futebol tem dois graus de liberdade. Uma conta em um fio tem um grau de liberdade. Um corpo rígido restrito a girar em torno de um eixo tb tem apenas um grau de liberdade.

Representação Vetorial das Rotações

Tomemos o caso mais simples, de rotação em torno de um eixo. A rotação pode ser descrita por uma única grandeza, o ângulo de rotação θ. Mas



também precisamos definir ou especificar a direção ($\hat{z}$) do eixo de rotação. Será que poderíamos definir um vetor $\vec{\theta}$, cujo módulo é igual ao ângulo de rotação e cuja direção aponta para a do eixo de rotação? O sentido seria dado pela regra da mão direita, ou seja: rotação anti-horária seria positiva.

A resposta é <u>NÃO</u>. Essa "entidade" $\vec{\theta}$, embora tenha módulo, direção e sentido, não é um vetor! Isso porque as rotações, em geral, não são <u>comutativas</u> (e vetores obedecem a uma álgebra comutativa!)

Vamos ver o seguinte exemplo: Vamos rodar um corpo rígido (um livro) de um ângulo θ_1 em torno de uma dada direção $\hat{\theta}_1$, e depois de θ_2 em torno de outra direção $\hat{\theta}_2$. Vamos mostrar que em geral.

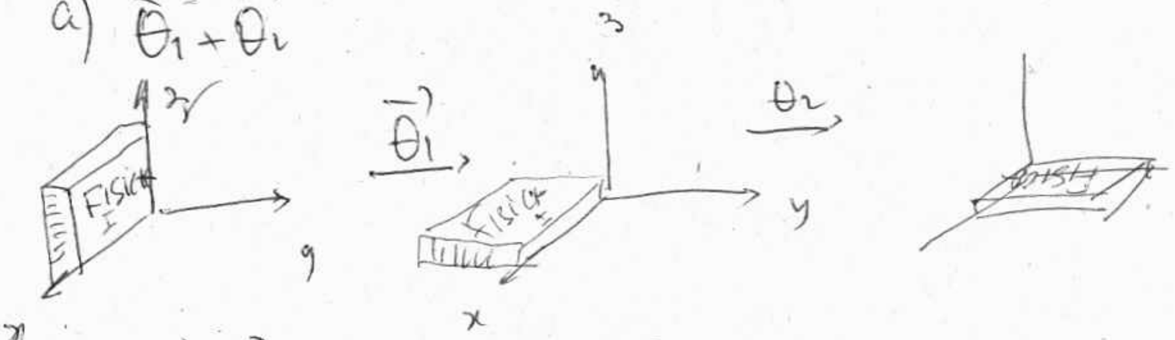
$$\vec{\theta}_1+\vec{\theta}_2 \neq \vec{\theta}_2+\vec{\theta}_1$$

Tomando-se por exemplo:

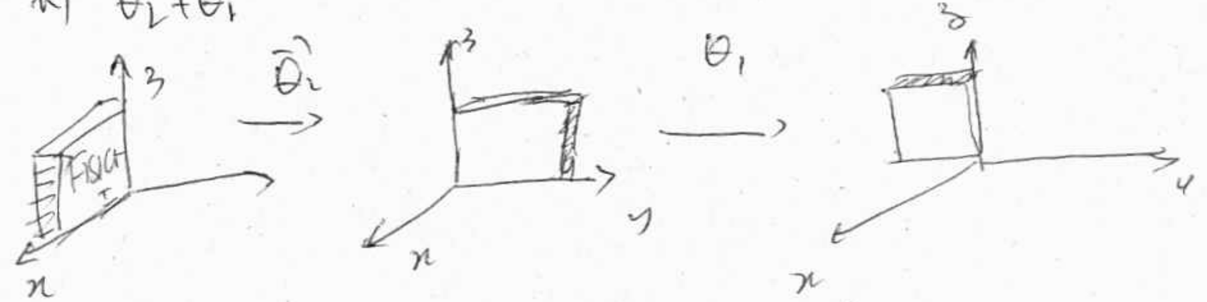
$\vec{\theta}_1$ = rotação de ângulo $\pi/2$ em torno do eixo x.

$\vec{\theta}_2$ = rotação de ângulo $\pi/2$ em torno do eixo z

a) $\vec{\theta}_1+\vec{\theta}_2$



b) $\vec{\theta}_2+\vec{\theta}_1$



Embora as <u>rotações finitas</u> não possam ser representadas por vetores, pode-se mostrar que rotações <u>infinitesimais</u> são comutativas e então podemos empregar, para elas, a notação vetorial $\vec{d\theta}$, uma rotação de ângulo $d\theta$ em torno do eixo definido pelo vetor $\vec{d\theta}$ é um vetor, de modo que $\vec{d\theta_1}+\vec{d\theta_2} = \vec{d\theta_2}+\vec{d\theta_1}$ p/ quaisquer $\vec{d\theta_1}, \vec{d\theta_2}$. Portanto, a <u>velocidade angular</u>, $\vec{\omega} = \frac{\vec{d\theta}}{dt}$ <u>também é um vetor</u>.

Antes de passar p/ a definição vetorial das rotações, vamos rever o <u>produto vetorial</u> de dois vetores.

Definimos o vetor $\vec{C}$ como sendo o <u>produto</u> vetorial dos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$,

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

<u>Direção</u>: $\vec{C}$ tem direção perpendicular ao plano definido por $\vec{A}$ e $\vec{B}$

<u>Sentido</u>: Regra da mão direita.

<u>Módulo</u>: $|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \operatorname{sen} \varphi$

Notemos que $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

(o produto vetorial é uma operação <u>anti-comutativa</u>)

- O produto vetorial é distributivo em relação à soma de vetores.

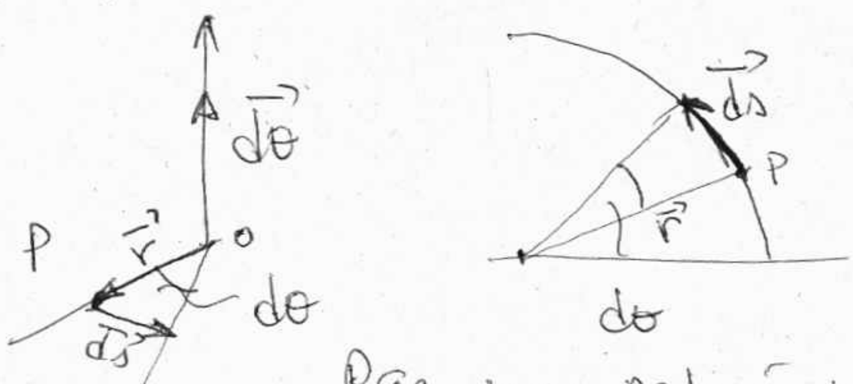
$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A} \times \vec{A} = 0 \\ \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \\ \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \\ \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \end{array} \right\}$$

Se $\vec{A} = a_x \hat{\imath} + a_y \hat{\jmath} + a_z \hat{k}$ e
$\vec{B} = b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath} + b_z \hat{k}$

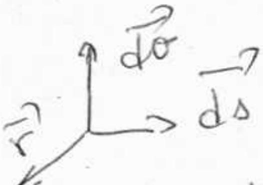
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Rotações infinitesimais:



Para uma rotação infinitesimal $\vec{d\theta}$, o deslocamento $\vec{ds}$ do ponto P é perpendicular a $\vec{r}$ e tem módulo $ds = r\,d\theta$. Portanto, podemos escrever:

$$\vec{ds} = \vec{d\theta} \times \vec{r}$$



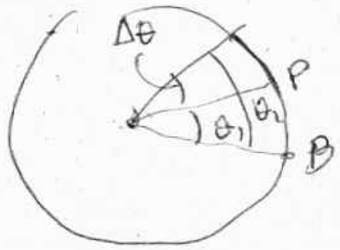
Como a velocidade do ponto P é ~~da~~ $\vec{v} = \frac{\vec{ds}}{dt}$, temos:

$$\frac{\vec{ds}}{dt} = \frac{\vec{d\theta}}{dt} \times \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Ou $v = \omega r$ (em módulo)

Variáveis rotacionais.

Tomemos novamente as rotações em torno de um eixo, sendo θ_1 a posição angular em t_1 e θ_2 em t_2, temos:



A velocidade angular é dada por $\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt}$

Da mesma forma, se em t_1 a velocidade angular do ponto P é ω_1 e em t_2 é ω_2, temos então a aceleração angular definida como:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Note que $\vec{\omega}$ (no caso de rotações em torno de 1 eixo) tem sempre a direção do eixo e portanto $\vec{\alpha}$ tb tem a direção do eixo de rotação.

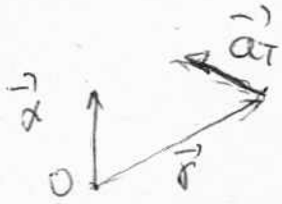
Na notação vetorial,

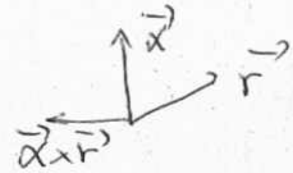
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$ (note que a ordem dos vetores é preservada!)

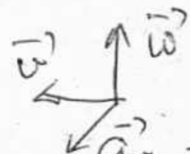
$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$\vec{a}$ pode então ser escrita como a soma dos dois termos: $\vec{a}_R = \vec{\omega} \times \vec{v}$ e $\vec{a}_T = \vec{\alpha} \times \vec{r}$





$\vec{a}_T = \vec{\alpha}\times\vec{r}$



$\vec{a}_n = \vec{\omega}\times\vec{v}$ (M. circular $\omega \perp r \Rightarrow$ $a_n = \omega v = \omega^2 r$)

Dinâmica Rotacional

Na cinemática das rotações (em torno de 1 eixo) temos a correspondência com o movimento de translação em 1 eixo (mov linear)

deslocamento linear $x \longrightarrow$ deslocamento angular θ

velocidade linear $v \longrightarrow$ velocidade angular ω

aceleração linear $a = \frac{dv}{dt}$, aceleração angular $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

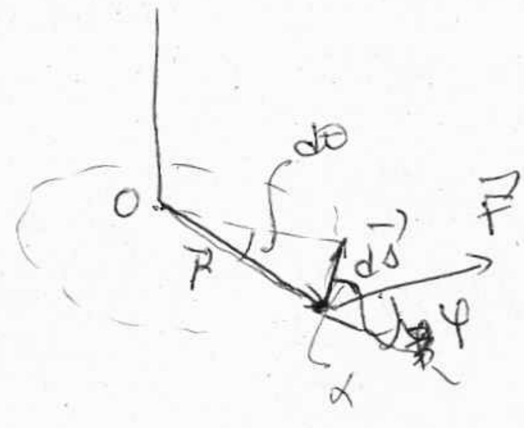
Agora, para estudarmos a dinâmica das rotações precisamos encontrar o equivalente da Força, para o caso das rotações. Partindo da definição de trabalho para um deslocamento infinitesimal dx, temos:

$$dW = F.dx \quad \text{(unidimensional)}$$

Analogamente, para o caso das rotações em torno de um eixo, teríamos:

$dW = \tau . d\theta$ onde τ seria o correspondente à Força.

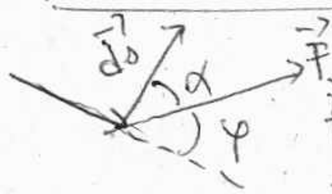
Tomemos o caso de uma partícula de massa $\underline{m}$ sob a ação de uma força $\vec{F}$, como na figura abaixo.



$$dW = \vec{F}\cdot\vec{ds} = F.ds.\operatorname{sen}\varphi$$

mas $ds = r\,d\theta$

$$\boxed{dW = F.r.\operatorname{sen}\varphi\,.\,d\theta}$$



$$\vec{F}\cdot\vec{ds} = F.ds\cos\alpha$$
$$= F.ds.\operatorname{sen}\varphi$$

Portanto, da análise que fizemos antes, ($dW = \tau\,d\theta$) temos

$$\tau = F.r.\operatorname{sen}\varphi$$

Note que τ parece o módulo de um vetor que é resultado do produto vetorial

$$|\vec{F}\times\vec{r}| = |\vec{F}|\,|\vec{r}|\operatorname{sen}\varphi = |\vec{r}\times\vec{F}|$$

Vamos então definir o vetor Torque $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F} = \text{torque da força } \vec{F}$$

em relação ao ponto O

Portanto $\vec{\tau}$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{F}$ $\Rightarrow$ $\vec{\tau} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{d\theta}$

$$dW = \vec{\tau}\cdot\vec{d\theta} = \tau.d\theta$$

para uma partícula:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{mas} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

mas,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \underbrace{\cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}}_{0}$$

→ pois $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ e $\vec{p} = m\vec{v}$ $\underbrace{\quad}_{\text{paralelos}}$

portanto

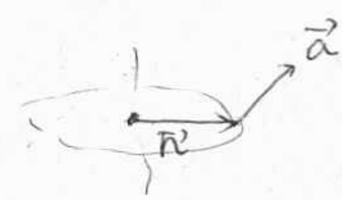
$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

Comparando esta expressão e $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, vemos que $\vec{r} \times \vec{p}$ é o análogo, nas notações para o momento linear $\vec{p}$ das translações. portanto vamos denominar o termo $\vec{r} \times \vec{p}$ de <u>momento angular</u>.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

Como o Torque depende do ponto <u>O</u> (torque em relação ao ponto <u>O</u>) o mesmo ocorre com o momento angular.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m\vec{a} = m\,\vec{r} \times \vec{a}$$



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a}_T + \vec{r} \times \vec{a}_n \qquad \vec{a}_n \parallel \vec{r} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{a}_n = 0$$

$\vec{r} \perp \vec{a}_T \Rightarrow |\vec{r} \times \vec{a}_T| = r a_T = r a_T$ (com direção $\perp$ ao plano formado por $\vec{a}_T$ e $\vec{r}$)
↓
direção de $\vec{\alpha}$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = m(\vec{r} \times \vec{a}_T) \Rightarrow |\vec{\tau}| = m r a_T = m r \alpha r = m r^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = I\vec{\alpha}}$$

Momento de Inércia

Vimos que a 2ª lei de Newton para as rotações, pode ser definida por $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ ou por $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, onde $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ é o momento angular. Assim como o momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$, vamos tentar obter uma definição de $\vec{L}$ na forma de variáveis angulares, como $\vec{L} = I\vec{\omega}$, onde I, a inércia angular, é o equivalente da massa (a inércia das translações)

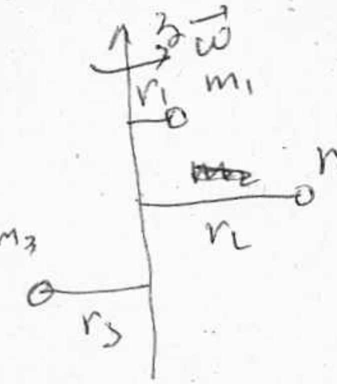
Para rotações em torno de um eixo fixo, $\vec{r}$ é sempre perpendicular a $\vec{v}$ e portanto, em módulo, $L = mrv$. Como $v = \omega r$, temos, ~~em mo~~: $L = mr^2\omega$. Mas, sabemos que $\vec{L}$ tem sempre a direção de $\vec{\omega}$ (pois $\vec{r} \times m\vec{v}$ tem direção $\perp$ ao plano formado por $\vec{r}$ e $\vec{v}$ e portanto $\perp$ a eles) portanto, ~~podemos escrever~~, na forma vetorial:

$$\boxed{\vec{L} = mr^2\vec{\omega}}$$

Assim, $\underline{I = mr^2}$ é a medida da inércia rotacional (para uma partícula de massa $\underline{m}$, a uma distância r do eixo de rotação)

(Muitas das conclusões e definições que estamos fazendo, se aplicam para o caso - simples - de rotações em torno de um eixo...

Se tivermos um corpo rígido, formado por várias massas, m_1, m_2, m_3... girando em torno de um eixo (z):



O momento angular total $\vec{L}$ será dado por:

$$\vec{L} = m_1 r_1^2 \vec{\omega} + m_2 r_2^2 \vec{\omega} + m_3 r_3^2 \vec{\omega}$$

($\vec{\omega}$ é o mesmo p/ todas as partículas já que fazem parte de um corpo rígido)

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2)\vec{\omega}$$

e portanto $\boxed{I = \sum_{i=1}^{3} m_i r_i^2}$ onde r_i é a distância da massa m_i ao eixo de rotação.

Para um corpo rígido formado por n massas girando em torno de um dado eixo, o momento de inércia é portanto

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}$$ r_i = distância ao eixo de rotação.

Note que, esse mesmo conjunto de massas (≡ corpo rígido) girando em um eixo perpendicular ao considerado, teria um momento de inércia diferente! (pois os r_i seriam diferentes!)

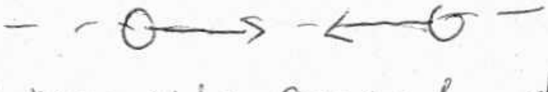
Torque resultante na direção do eixo de rotações.

Assim como a 2ª lei de Newton se refere à resultante das forças sobre uma partícula ser igual ao produto de sua massa (inércia) pela aceleração resultante, o mesmo se dá para a expressão $\tau_z = I \alpha_z$, que se refere ao torque resultante em relação ao eixo z. I tb corresponde ao momento de inércia para rotações em torno do eixo z.

Conservação do Momento Angular

Como $\vec{\tau}_{rs} = \frac{d\vec{L}}{dt}$, se $\vec{\tau}_{rs} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$

Há uma grande classe de problemas interessantes de rotações, que envolvem forças centrais. Forças como a da gravidade (e praticamente todas as forças fundamentais na natureza, com pequenas exceções nos casos microscópicos) são centrais, isto é, as interações entre duas partículas se dá na direção da linha que une as partículas. A 3ª lei de Newton decorre disso.



O momento angular da Terra girando em torno do Sol é constante, pois a força gravitacional entre Terra e Sol é ao longo do raio da órbita e portanto não produz torque.

Energia Cinética Rotacional

A energia cinética de uma partícula girando com velocidade $\vec{v}$, de módulo constante, em torno de um ponto $\underline{O}$ com raio constante (MCU) é obviamente

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Em termos das grandezas rotacionais, podemos escrever:

$$v = \omega r \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = \boxed{\frac{1}{2} I \omega^2}$$

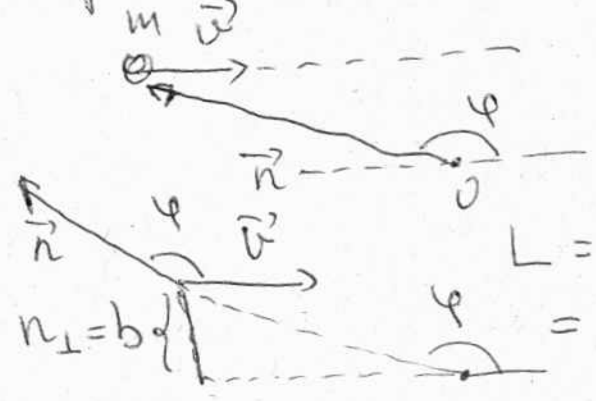
Uma outra forma de se escrever a expressão para a energia cinética de uma partícula é:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v^2}{m} = \frac{p^2}{2m}.$$ Em termos das grandezas usadas na descrição das rotações, isso corresponde a:

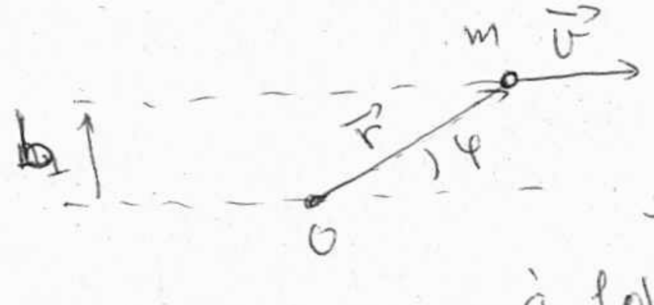
$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{I^2 \omega^2}{I} = \boxed{\frac{L^2}{2I}}$$

Momento Angular, em relação a um ponto $\underline{O}$, de uma partícula em MRU

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



$L = m r v \,\text{sen}\varphi = m v r \,\text{sen}\varphi$
$= m v r_\perp$



$L = m v r \,\text{sen}\varphi$
$= m v r_\perp$

$\vec{L}$ sempre na direção $\perp$ à folha de papel, saindo dela

$|L| = m v r_\perp = \cancel{cte}\; m v b = cte$