1. **Resolução da Primeira Avaliação.**

1) $X_i \overset{iid}{\sim} Geo(p)$, $P(X_i = x) = p(1-p)^{x-1}$, $x = 1, 2, \ldots$. Utilizaremos Borel-Cantelli para mostrar que o evento $[X_n > n]$ ocorre um número finito de vezes com probabilidade 1.

Note que

$$F(x) = P(X \leq x) = p\sum_{k=1}^{x}(1-p)^{k-1} = p\left[\frac{(1-p)^{1-1} - (1-p)^x}{1-(1-p)}\right]$$
$$= p\left[\frac{1-(1-p)^x}{p}\right] = 1-(1-p)^x.$$

Veja que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > n) \overset{idt}{=} \sum_{n=1}^{\infty} 1 - F(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 - [1-(1-p)^n]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^n = \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{p} < \infty,$$

logo, por Borel-Cantelli, somente um número finito dos X_n são maiores do que n.

2)

$$X_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X}{1+X}\right)^k, \ n > 1.$$

Note que trata-se de uma soma geométrica, pois $X/(1+X) < 1$,

$$X_n = \frac{\frac{X}{1+X} - \left(\frac{X}{1+X}\right)^{n+1}}{1-\frac{X}{1+X}} = \frac{\frac{X}{1+X} - \left(\frac{X}{1+X}\right)^{n+1}}{\frac{1}{1+X}},$$

aplicando o limite,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \frac{\frac{X}{1+X}}{\frac{1}{1+X}} = X,$$

então X_n converge quase certamente para X.

3)

$$X_n \overset{ind}{\sim} P(\lambda n) \qquad \text{e} \qquad Y_n \overset{ind}{\sim} Bin(n,p).$$

queremos mostrar que X_n/Y_n converge quase certamente.

Note que podemos reescrever essas quantidades como:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^*, \ X_i^* \overset{iid}{\sim} P(\lambda) \qquad \text{e} \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i^*, \ Y_i^* \overset{iid}{\sim} Bin(1,p)$$

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^*}{\sum_{i=1}^n Y_i^*} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^*}.$$

Pela lei forte de Kolmogorov,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^* \overset{q.c.}{\Rightarrow} \lambda \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^* \overset{q.c.}{\Rightarrow} p$$

pois os X_i e Y_i são integráveis, isto é, $\mathbb{E}\,|X_i| < \infty$ e $\mathbb{E}\,|Y_i| < \infty$; e $\mathbb{E}\,[X_i] = \lambda$ e $\mathbb{E}\,[Y_i] = p$.

Um resultado importante garante que a razão de duas sequências de variáveis aleatórias que convergem quase certamente também converge quase certamente se as sequências estão bem definidas (ou seja, o denominador é zero um número finito de vezes).

Portanto,

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^*}{\sum_{i=1}^n Y_i^*} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^*} \overset{q.c.}{\Rightarrow} \frac{\lambda}{p}.$$

4) $X_i \overset{ind}{\sim} F_i,\ X_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ e $Y_n = -\ln(1 - F_n(X_n))$

$$G_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P\left(-\ln(1 - F_n(X_n)) \leq y\right) = P\left(1 - F_n(X_n) \geq e^{-y}\right)$$

$$= P\left(F_n(X_n) \leq 1 - e^{-y}\right) = P\left(X_n \leq F_n^{-1}\left(1 - e^{-y}\right)\right) = F_n\left(F_n^{-1}\left(1 - e^{-y}\right)\right)$$

$$G_{Y_n}(y) = 1 - e^{-y}.$$

Assim $Y_n \overset{D}{\Rightarrow} exp(1)$.

E-mail address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil