1. TÓPICO 1

1.1. **Convergência em distribuição e propriedades.**

Exemplo 1.1. Uma variável aletória Y é definida como degenerada se $Y = \theta$ com probabilidade 1 (θ: número real)

A sua função de distribuição é

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y < \theta \\ 1 \text{ se } y \geq \theta \end{cases}$$

Exemplo 1.2. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ iid com distribui cão uniforme no intervalo $(0, \theta)$
, isto é, $X_1 \sim U(0, \theta)$ e defina $(Y_n)_{n \geq 1}$ por
$Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots\}$. Portanto

$$F_{Y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(X_1 \leq y)^n = \begin{cases} 0 \text{ se } y < 0 \\ \left(\frac{y}{\theta}\right)^n \text{ se } 0 \leq y < \theta \\ 1 \text{ se } y \geq \theta \end{cases}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y < \theta \\ 1 \text{ se } y \geq \theta \end{cases} = F_Y(y).$$

que é uma função de distribuição

Exemplo 1.3. Seja $(Y_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $P(Y_n = n) = 1$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 \text{ se } y < n \\ 1 \text{ se } y \geq n \end{cases}$$

$$\lim_{n \to \infty} F_{Y_n}(y) = 0, \text{ que não é uma função de distribuição.}$$

Exemplo 1.4. Sejam $(X_n)_{n \geq 1}$ tais que $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$

Observe que $X_n \overset{qc}{\Rightarrow} 0$ e $X_n \overset{P}{\Rightarrow} 0$ A função de distribuição de X_n é

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < \frac{1}{n} \\ 1 \text{ se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x \leq 0 \end{cases} \text{ que não é função de distribuição}$$

contudo

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq 0 \\ 0 \text{ se } x < 0 \end{cases} \quad \text{é função de distribuição.}$$

Tais considerações motivam a seguinte definição

Definição 1.5. Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções de distribuições e F uma função de distribuição tal que, para todo número real x em que F é contínua em x, temos

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Então dizemos que $(F_n)_{n\geq 1}$ converge em distribuição para F. $F_n \to^D F$.

Se X_n é v.a. com função de distribuição F_n e X é v.a. com função de distribuição F e $F_n \to^D F$, dizemos também que $X_n \to^D X$.

Teorema 1.6. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ sequência de v.a.(s) com funções de distribuições absolutamente contínuas com funções de densidade de probabilidade $f_n(x)$.*

Seja X v.a. com função de distribuição absolutamente contínua com função de densidade $f(x)$.

$$\textit{Se } \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)),$$

então

$$F_n \to^D F.$$

Prova: *Primeiramente lembramos que se $f_n(x)$ é uniformemente contínua, então $\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx$.*

Sejam $F_n(y)$ e $F(y)$ as funções de distribuições de X_n e X, respectivamente. Então

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{y} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{y} f_n(x)dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{y} \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{y} f(x)dx = \int_{-\infty}^{y} f(x)dx = F(y).$$

Exemplo 1.7. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias com $X_n \sim U\left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-1/n} & \text{se} \quad 0 < x < 1 - \frac{1}{n} \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } 0 < x < 1 \\ 0 \quad cc \end{cases}$$

é a função densidade de uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Assim $F_n \to^D F$ e $X \sim U(0,1)$.

Teorema 1.8. *Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a.(s) discretas que assumem valores no conjunto dos números naturais*

$$P(X_n = k) = p_n(k), \; k = 0, 1, \ldots$$

e seja X uma v.a. que também assume valores em $\mathbb{N}$

$$com \; P(X_n = k) = p(k), \; k = 0, 1, \ldots$$

Então $\lim_{n\to\infty} p_n(k) = p(k)$ se e só se $F_n \to^D F$.

Prova: *Observe que a função de distribuição de X_n é $F_n(y) = \sum_{k\leq[y]} p_n(k)$ e a função de distribuição de X é $F(y) = \sum_{k\leq[y]} p(k)$. Portanto*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\leq[y]} p_n(k) =$$

$$\sum_{k\leq[y]} \lim_{n\to\infty} p_n(k) = \sum_{k\leq[y]} p(k) = F(y).$$

e a condição é necessária. (A segunda igualdade acima é devido ao teorema da convergência dominada).

Por outro lado, a condição é suficiente pois:

$$\lim_{n\to\infty} p_n(k) = \lim_{n\to\infty} (F_n(k) - F_n(k^-)) = F(k) - F(k^-) = p(k).$$

Observação 1.9. Se os valores de X_n não forem isolados o teorema pode não valer: Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de v.a.(s) discretas com $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$ e X uma variável aleatória com $P(X = 0) = 1$. A função de distribuição de X_n é

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < \frac{1}{n} \\ 1 \text{ se } x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

e a função de distribuição de X é

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ 1 \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$$

de maneira que $X_n \to^D X$. Mas $P_n(0) = 0$ e $p(0) = 1$ de maneira que $p_n(k) \nrightarrow p(k)$.

Exemplo 1.10. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n : 1, 2, 3, \ldots, n$
com

$$P(X_n = k) = \frac{a}{2^k}$$

O valor de a é definido por:

$$1 = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{2^k} = a\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2^n}} = a\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \therefore a = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$$

Portanto

$$P(X_n = k) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}\frac{1}{2^k}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{1}{2^k} \quad k \in \mathbb{N}$$

Observe que $X : 1, 2, \ldots$, isto é, o suporte de X é $\mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \frac{1}{2^k} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \;\; e \;\; X_n \to^D X.$$

Teorema 1.11. *Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória. Se $X_n \to^P X$ então $X_n \to^D X$.*

Prova:
F_n : *função de distribuição de* X_n
F : *função de distribuição de* X
x : *ponto de continuidade de* F

$$\{X \leq X_n + \epsilon\} \;\; ou \;\; \{X > X_n + \epsilon\} \;\; \text{é verdade.}$$

Em $\{X_n \leq x\}$ *temos* $\{X \leq x + \epsilon\}$ *ou* $\{X - X_n > \epsilon\}$

$$\{X_n \leq x\} \subset \{X \leq x + \epsilon\} \; ou \; \{|X - X_n| > \epsilon\}$$

$$P\left(X_n \leq x\right) \leq P\left\{X \leq x + \epsilon\right\} + P\left\{|X - X_n| > \epsilon\right\}$$

$$F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + P\left\{|X - X_n| > \epsilon\right\}. \tag{1}$$

Com argumento semelhante

$$\{X_n \leq X + \epsilon\} \ \text{ ou } \ \{X_n > X + \epsilon\} \text{ é verdade.}$$

Em $\{X \leq x - \epsilon\}$ *temos* $\{X_n \leq x\}$ *ou* $\{X_n - X > \epsilon\}$

$$\{X \leq x - \epsilon\} \subset \{X_n \leq x\} \cup \{|X_n - X| > \epsilon\}$$

$$P\{X \leq x - \epsilon\} \leq P\{X_n \leq x\} + P\{|X_n - X| > \epsilon\}$$

$$F(x - \epsilon) \leq F_n(x) + P\{|X_n - X| > \epsilon\}. \tag{2}$$

Combinando (1) *e* (2) *temos*

$$F(x - \epsilon) - P\{|X_n - X| > \epsilon\} \leq F_n(x) \leq F(x + \epsilon) + P\{|X_n - X| > \epsilon\}$$

fazendo $n \to \infty$

$$F(x - \epsilon) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x + \epsilon)$$

como x *é ponto de continuidade, fazendo* $\epsilon \to 0$

$$F(x) \leq \lim F_n(x) \leq F(x).$$

Exemplo 1.12. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias identicamente distribuídas como X, em que

$X/\ X_n$	0	1	
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Assim $X_n \to^D X$ pois X_n e X tem mesma função de distribuição.
Contudo ($\epsilon < 1$),

$$P\{|X_n - X| > \epsilon\} = P\{|X_n - X| = 1\}$$

$$= P\{X_n = 0 \text{ e } X = 1\} + P\{X_n = 1 \text{ e } X = 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \not\to 0$$

$$\therefore \quad X_n \not\to^P X$$

.

Assim convergência em distribuição não implica convergência em probabilidade.
Contudo temos o teorema

Teorema 1.13. *Sejam* $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias e* k *uma constante. Se* $X_n \to^D k$ *então* $X_n \to^P k$.

Prova:

$$\text{(hipótese)} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \geq k \\ 0 \text{ se } x < k \end{cases}$$

Contudo ($\epsilon < 1$),

$$P\{|X_n - k| \leq \epsilon\} = P\{k - \epsilon \leq X_n \leq k + \epsilon\} \geq$$

$$= P\{k - \epsilon < X_n \leq k + \epsilon\} = F_n(k+\epsilon) - F_n(k-\epsilon).$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - k| \leq \epsilon\} \geq$$
$$\lim_{n\to\infty} F_n(k+\epsilon) - \lim_{n\to\infty} F_n(k-\epsilon) = 1 - 0 = 1.$$

Teorema 1.14. Teorema de Slutsky

Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ *e* $(Y_n)_{n\geq 1}$, X, *v.a.(s) tais que* $X_n \to^D X$, $Y_n \to^P k$ *então:*

(1) $X_n \pm Y_n \to^D X \pm k$

(2) $X_n Y_n \to^D kX$

(3) *Se* $k \neq 0$ *e* $P(Y_n \neq 0) = 1$

$$\frac{X_n}{Y_n} \to^D \frac{X}{k}$$

Exemplo 1.15. Seja $(Z_n)_{n\geq 1}$ sequência de v.a.(s) tais que

$$P(Z_n = n) = \frac{1}{n} \qquad\qquad P(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

Será que Z_n converge em distribuição ?

Exemplo 1.16. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ iid com distribuição $U(0,1)$. Seja $Y_n = n\min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Qual o limite em distribuição de Y_n?

Exemplo 1.17. Qual o limite em distribuição de $Z_n + Y_n$ onde Z_n e Y_n são como acima?

Exemplo 1.18. $X_1, X_2, \ldots$, v.a.(s) com funções de distribuição dadas por

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < -n \\ \frac{x+n}{2n} \text{ se } -n \leq x < n \\ 1 \text{ se } x \geq n \end{cases}$$

$X_n \overset{D}{\Rightarrow} ?$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x+n}{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{2n} + \frac{n}{2n}\right) = \frac{1}{2}\ \forall x \in \mathbb{R}$$

consequentemente não é função de distribuição e X_n não converge em distribuição.

Exemplo 1.19. Sejam $X_1, X_2, \ldots$, v.a.(s) iid $N(0,1)$ e $Y_n = \bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$. $Y_n \to^D$?

Exemplo 1.20. Sejam $X_1, X_2, \ldots$, v.a.(s) iid $N(0,1)$

$$U_n = \left\{\frac{X_1}{X_2} + \frac{X_3}{X_4} + \ldots, + \frac{X_{2n-1}}{X_{2n}}\right\} \text{(para todo n par) e } V_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots X_n^2.$$

Defina $Z_n = \frac{U_n}{V_n}$. Z_n converge em distribuição?
Obs: $\frac{X_1}{X_2}$ tem distribuição de $Cauchy(0,1)$.

E-mail address: bueno@ime.usp.br

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil