Aula 3

Cinemática Inversa de Manipuladores Robóticos

Prof. Assoc. Marcelo Becker

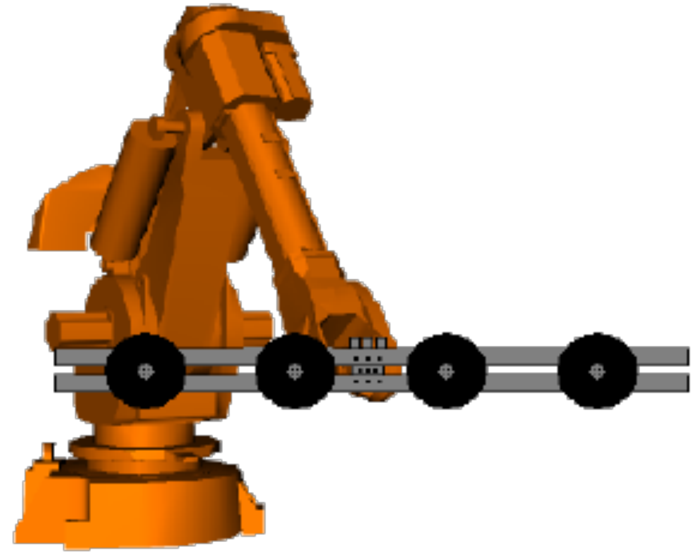
USP - EESC - SEM

Sumário da Aula

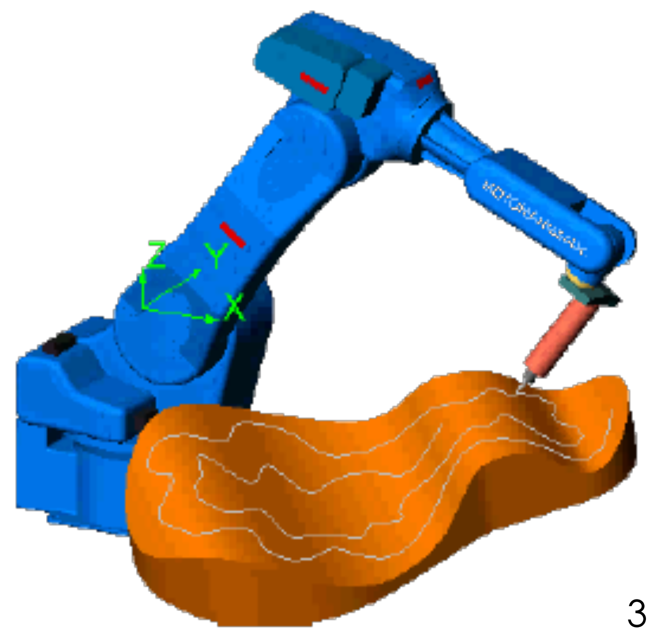
- **Definições**
- Solução Algébrica vs. Geométrica
- Exemplos em Robôs Industriais
- Exercícios Recomendados
- Bibliografia Recomendada

Definições

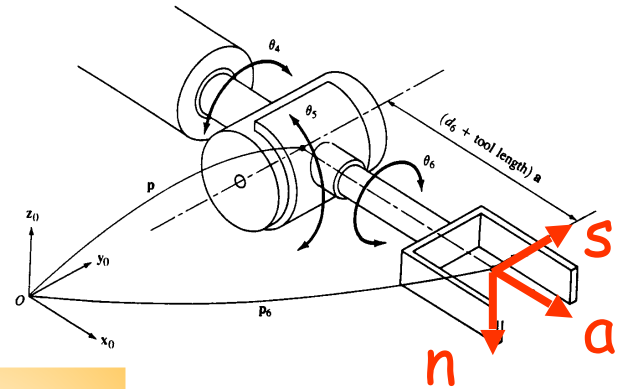
- Cinemática Inversa:
  - Sejam dadas a posição e orientação desejadas para a ferramenta, quais as variáveis de junta do manipulador?



- Aplicação mais importante:
  - Geração de Trajetórias...



Definições
Existência de Soluções



- Dada a matriz:

$$
{}^{0}T_{N} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{array}{cccc} \text{Yaw} & \text{Pitch} & \text{Roll} & \text{Pos.} \\ \end{array} \begin{bmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

- Deseja-se obter: $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$

Definições
Existência de Soluções

- Tomando um Robô com 6 GDLs como exemplo:
  - 16 elementos na matriz

$$
{}^{0}T_{6} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

3 equações de rotação independentes

6 Equações ñ-lineares e transcendentais

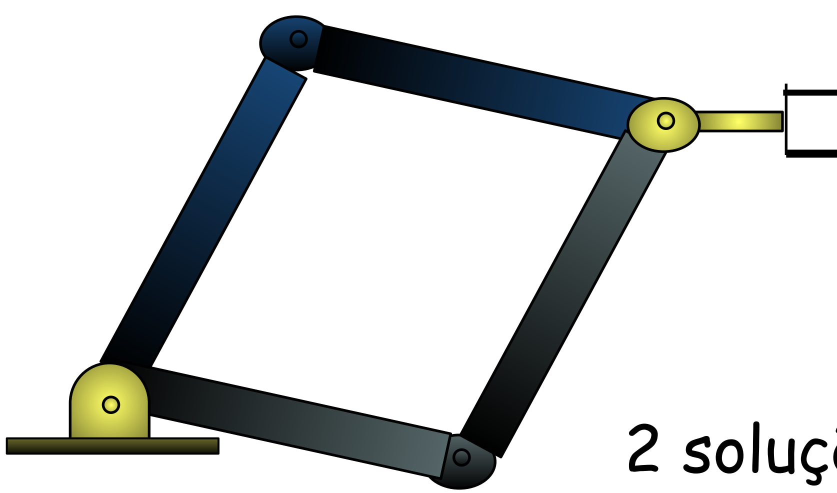
3 equações de posição

Valores triviais

- Deseja-se obter: $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_6$
  - Sendo N=6, temos 6 incógnitas e ***6*** equações...

Definições
Existência de Soluções

- Número de Soluções:
  - Pode haver mais de uma solução ou até mesmo, nenhuma (Volume de trabalho)
  - Pode ser trabalhosa a solução de equações não lineares...

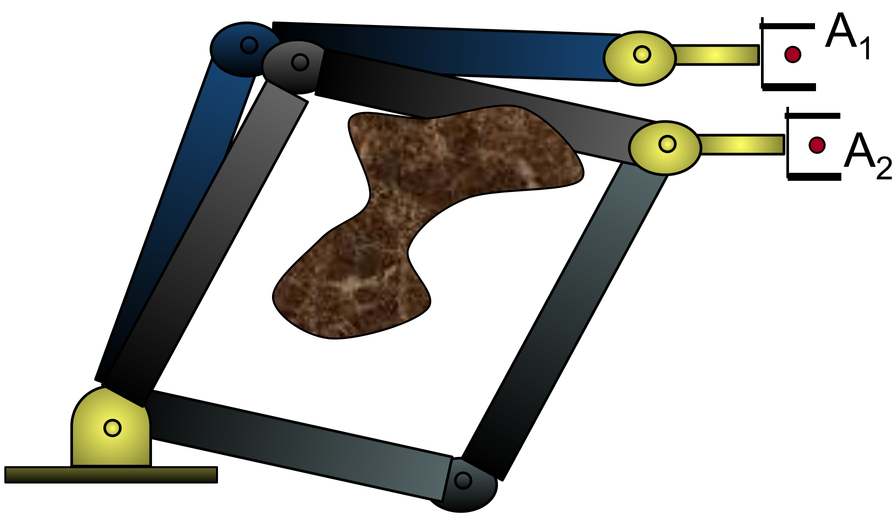


2 soluções!

Definições
Existência de Soluções

Múltiplas Soluções

- **Problema**: Escolher uma solução...
  - ✓ Solução mais próxima
  - ✓ Obstáculos
  - ✓ Pesos / Cargas
  - ✓ Volume de Trabalho
  - ✓ Limites das Juntas

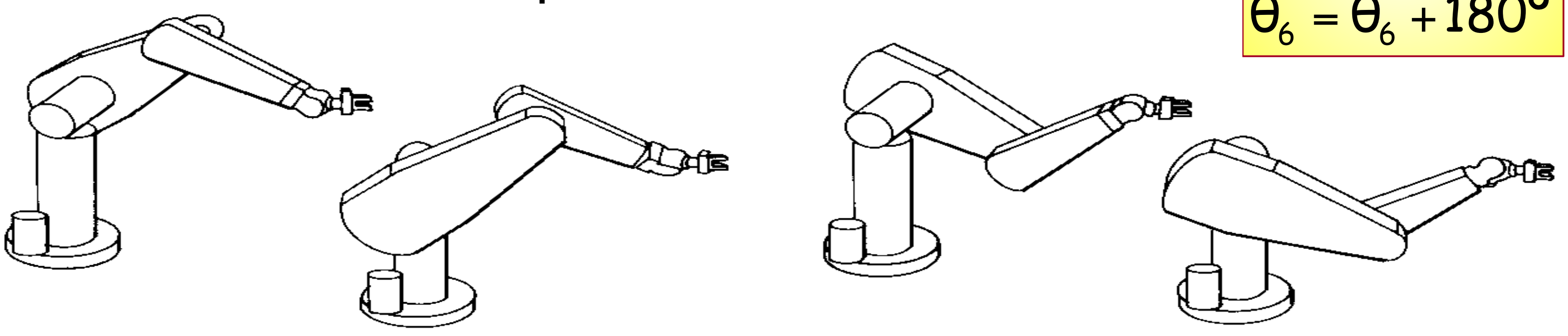


Definições

Existência de Soluções

- Para o Robô PUMA 560, há 8 soluções para a cinemática inversa...
  - As 3 primeiras variáveis de junta ($\theta_1,\theta_2,\theta_3$) definem posição do braço do robô
  - As 3 últimas ($\theta_4,\theta_5,\theta_6$), a orientação da garra
    - 4 soluções para a 3 primeiras juntas:
      - Ombro à **direita**
      - Ombro à **esquerda**

$$\theta_4' = \theta_4 + 180°$$
$$\theta_5' = -\theta_5$$
$$\theta_6' = \theta_6 + 180°$$



Definições
Existência de Soluções

Número de Soluções

Quanto maior o número de parâmetros de Denavit-Hatenberg não nulos, **maior** o número de possíveis soluções para o robô atingir a posição desejada.

Número de Soluções vs. $a_i \neq 0$ para um robô com 6 juntas de rotação

Robôs com mais de 6 GDLs podem ter infinitas soluções!!

a_i	Número de Soluções
$a_1 = a_3 = a_5 = 0$	≤ 4
$a_3 = a_5 = 0$	≤ 8
$a_3 = 0$	≤ 16
Todos $a_i \neq 0$	≤ 16

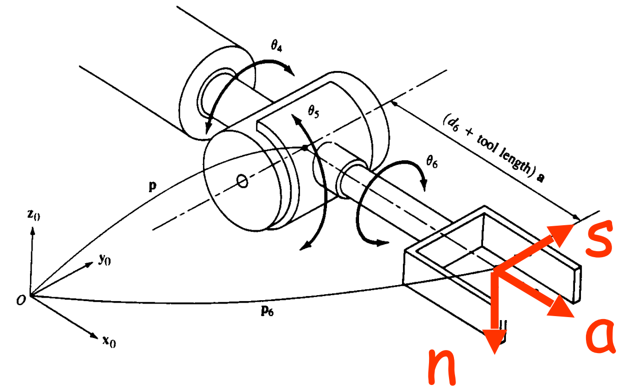
Definições
Existência de Soluções

- Como encontrar as soluções?
  - Não há algoritmo genérico → **Equações ñ lineares**
    - Deve-se encontrar todas as variáveis de junta!
    - Deve-se calcular todas as soluções!
  - Duas Classes:
    - Analíticas: ***Closed-form solutions***
    - Numéricas: ***Numerical solutions*** (iterativas)

Definições
Existência de Soluções

- Métodos Analíticos
  - Obtêm todas as soluções
  - Não trivial...
  - Empregados quando um grande número de parâmetros de Denavit-Hartenberg são nulos!
  - Dois métodos:
    - **ALGÉBRICO**
    - **GEOMÉTRICO**
- Métodos Numéricos Iterativos
  - Convergem para solução possível
  - Estratégias Anti-colisão
  - J^{-1}

Definições
Existência de Soluções



- E quando GDL = n (< 6)?

$$
{}^{0}T_{n} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

fç de n parâmetros!!

- E se a ferramenta for definida por 6 GDL?
  - Encontrar a solução "mais próxima" possível da desejada...

Definições
Existência de Soluções

- E se a ferramenta for definida por 6 GDL?
  - Encontrar a solução "mais próxima" possível da desejada...

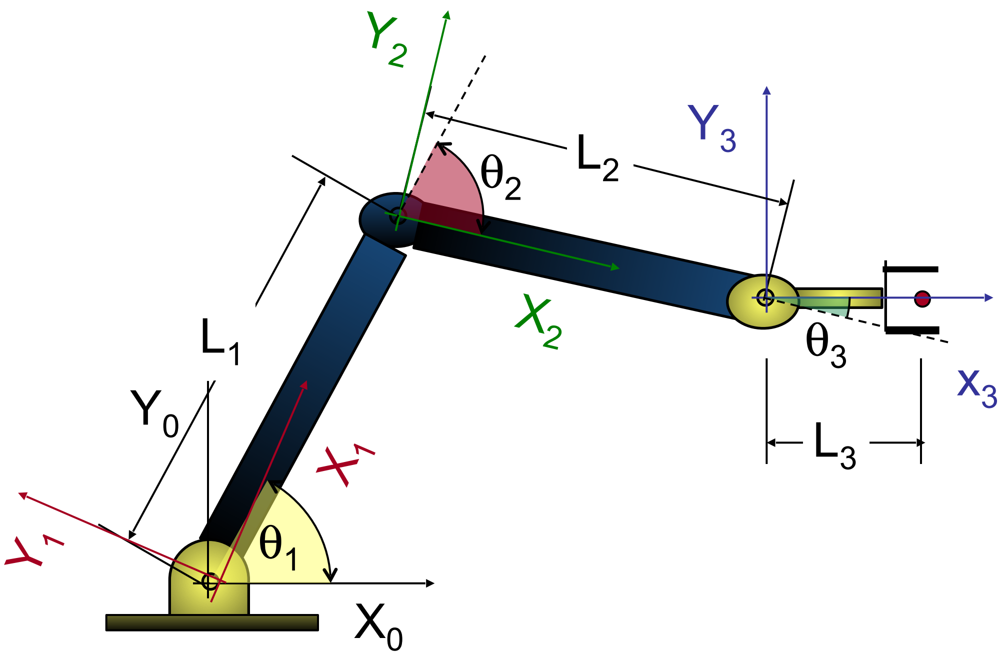
- Estratégia:
  1. Dada ${}^{0}T_{n}$ obter ${}^{0}T_{n^*}$, de modo que seja descrito com os n parâmetros de junta do manipulador e seja **próximo** de ${}^{0}T_{n}$.
  2. Aplicar a cinemática inversa a ${}^{0}T_{n^*}$ para encontrar as n variáveis de junta.
     - ✓ Ficar atento com o volume de trabalho do manipulador

Sumário da Aula

-
- **Solução Algébrica vs. Geométrica**
- Exemplos em Robôs Industriais
- Exercícios Recomendados
- Bibliografia Recomendada

Solução Algébrica

- Para o mecanismo planar de 3 links...



Parâmetros de Denavit-Hartenberg				
Junta	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	0°	0	0	θ_1
2	0°	L_1	0	θ_2
3	0°	L_2	0	θ_3

$$
{}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i . c\alpha_{i-1} & c\theta_i . c\alpha_{i-1} & -s\alpha_i . c\theta_i & a_i . s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Solução Algébrica

$$
{}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i.s\theta_i & s\theta_i.s\alpha_i & a_i.c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i.c\alpha_i & -s\alpha_i.c\theta_i & a_i.s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 . {}^{1}T_2 . {}^{2}T_3
$$

$$
{}^{0}T_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1.c_1 + L_2.c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1.s_1 + L_2.s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Solução Algébrica

- Obs.: uso de Redução Polinomial para resolver equações transcendentais

$$u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \cos\theta = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{2u}{1+u^2}$$

<u>Apêndice A: Livro J.J. Craig</u>

<u>Eqs. Algébricas</u>: Equações aonde a variável independente pode ser posta em evidência ou fatorada.

<u>Eqs. Transcendentais</u>: Equações aonde a variável independente não pode ser posta em evidência.

Solução Algébrica

- Definindo a posição e orientação do 3º link...

$$\left\{\begin{aligned} c_\phi &= c_{123} \\ s_\phi &= s_{123} \\ x &= L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ y &= L_1 s_1 + L_2 s_{12} \end{aligned}\right.$$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1.c_1 + L_2.c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1.s_1 + L_2.s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{{}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Solução Algébrica

- Assim obtemos as equações algébricas...

$$\left.\begin{array}{l} x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ y = L_1 s_1 + L_2 s_{12} \end{array}\right\} x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2 L_1 L_2 c_2$$

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(s_2, c_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{c_2 = \dfrac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2 L_1 L_2}} \\ \boxed{s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2}} \end{array}\right.$$

Solução Algébrica

- Dessa forma, para encontrar θ_1:

$$x = k_1 c_1 - k_2 s_1$$
$$y = k_1 s_1 + k_2 c_1$$

$$\Rightarrow$$

$$k_1 = L_1 + L_2 c_2$$
$$k_2 = L_2 s_2$$

- Sendo:

$$r = +\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$$
$$\gamma = \text{atan2}(k_2, k_1)$$

$$\left.\right\} \quad \begin{aligned} k_1 &= r.\cos\gamma = r.c_\gamma \\ k_2 &= r.\sin\gamma = r.s_\gamma \end{aligned}$$

Solução Algébrica

- Reescrevendo as equações:

$$x = k_1 c_1 - k_2 s_1$$
$$y = k_1 s_1 + k_2 c_1$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{x}{r} = c_\gamma c_1 - s_\gamma s_1$$
$$\frac{y}{r} = c_\gamma s_1 + s_\gamma c_1$$

- Então:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \cos(\gamma + \theta_1) \\ \frac{y}{r} &= \sin(\gamma + \theta_1) \end{aligned}\right\} \quad (\gamma + \theta_1) = \operatorname{atan2}\left(\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = \operatorname{atan2}(y, x)$$

$$\boxed{\theta_1 = \operatorname{atan2}(y, x) - \operatorname{atan2}(k_2, k_1)}$$

Solução Algébrica

- Sendo:

$$\theta_1 = \operatorname{atan2}(y, x) - \operatorname{atan2}(k_2, k_1)$$

$$\theta_2 = \operatorname{atan2}(s_2, c_2)$$

- Obtém-se:

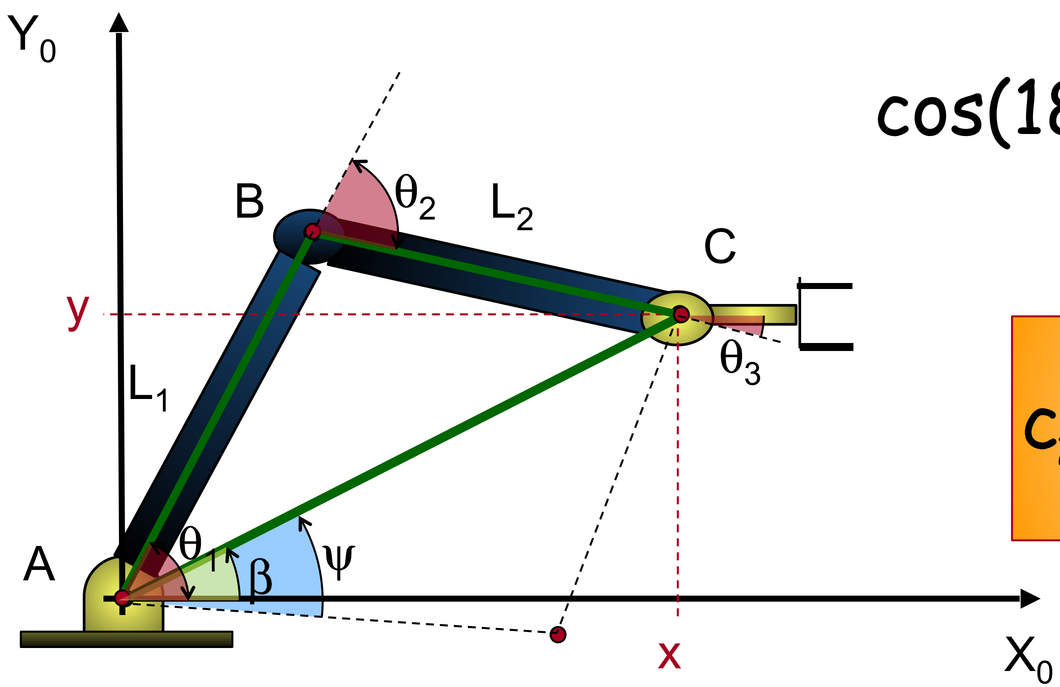
$$\boxed{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \operatorname{atan2}(s_\phi, c_\phi) = \phi}$$

Solução Geométrica

- Para o mesmo mecanismo planar de 3 links...
  - Aplicando a lei dos co-senos no ΔABC:

$$x^2 + y^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos(180° - \theta_2)$$

$$\cos(180° - \theta_2) = -\cos(\theta_2)$$



$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2}$$

Solução Geométrica

- Para os ângulos β e ψ...

$$\beta = \text{atan2}(y, x)$$

$$\cos\psi = \frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}$$

<u>Lei dos co-senos!</u>

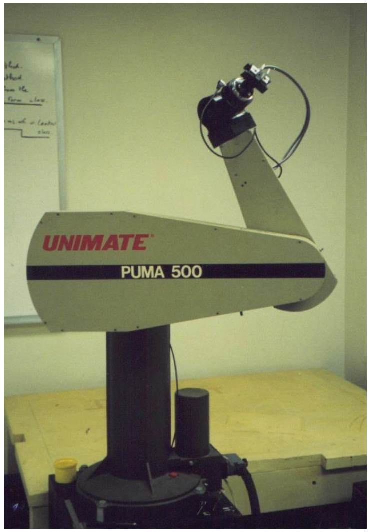
- Assim:

$$\theta_1 = \beta \pm \psi \qquad\qquad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \phi$$

Sumário da Aula

-
-
- **Exemplos em Robôs Industriais**
- Exercícios Recomendados
- Bibliografia Recomendada

Exemplo 1
Robô PUMA 560



- Manipulador com 6 GDLs

$$
{}^{0}T_{6} = \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}T_{6} = {}^{0}T_{1}(\theta_1).{}^{1}T_{2}(\theta_2).{}^{2}T_{3}(\theta_3).{}^{3}T_{4}(\theta_4).{}^{4}T_{5}(\theta_5).{}^{5}T_{6}(\theta_6)
$$

$$
\left[{}^{0}T_{1}(\theta_1)\right]^{-1}.{}^{0}T_{6} = {}^{1}T_{2}(\theta_2).{}^{2}T_{3}(\theta_3).{}^{3}T_{4}(\theta_4).{}^{4}T_{5}(\theta_5).{}^{5}T_{6}(\theta_6)
$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$\left[{}^{0}T_1(\theta_1)\right]^{-1} . {}^{0}T_6 = {}^{1}T_2(\theta_2) . {}^{2}T_3(\theta_3) . {}^{3}T_4(\theta_4) . {}^{4}T_5(\theta_5) . {}^{5}T_6(\theta_6)$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{1}T_6$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$^1n_x = c_{23}.(c_4.c_5.c_6 - s_4.s_6) - s_{23}.s_5.s_6$$
$$^1n_y = -s_4.c_5.c_6 - c_4.s_6$$
$$^1n_z = -s_{23}.(c_4.c_5.c_6 - s_4.s_6) - c_{23}.s_5.c_6$$

$$^1s_x = -c_{23}.(c_4.c_5.s_6 - s_4.c_6) + s_{23}.s_5.s_6$$
$$^1s_y = s_4.c_5.s_6 - c_4.c_6$$
$$^1s_z = s_{23}.(c_4.c_5.s_6 + s_4.c_6) + c_{23}.s_5.s_6$$

$$^1T_6 = \begin{bmatrix} ^1n_x & ^1s_x & ^1a_x & ^1p_x \\ ^1n_y & ^1s_y & ^1a_y & ^1p_y \\ ^1n_z & ^1s_z & ^1a_z & ^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^1a_x = -c_{23}.c_4.s_5 - s_{23}.c_5$$
$$^1a_y = s_4.s_5$$
$$^1a_z = s_{23}.c_4.s_5 - c_{23}.c_5$$

$$^1p_x = -s_{23}.d_4 + c_{23}.a_3 + c_2.a_2$$
$$^1p_y = d_3$$
$$^1p_z = -c_{23}.d_4 - s_{23}.a_3 - s_2.a_2$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Assim: $\quad {}^{1}p_y = d_3 \;\; = -s_1 p_x + c_1 p_y$

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}n_x & {}^{1}s_x & {}^{1}a_x & {}^{1}p_x \\ {}^{1}n_y & {}^{1}s_y & {}^{1}a_y & {}^{1}p_y \\ {}^{1}n_z & {}^{1}s_z & {}^{1}a_z & {}^{1}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Faz-se a substituição trigonométrica:

$$p_x = \rho.\cos\phi = \rho.c_\phi \qquad \rho = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$

onde

$$p_y = \rho.\mathrm{sen}\phi = \rho.s_\phi \qquad \phi = \mathrm{atan2}(p_y, p_x)$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$\left.\begin{aligned} d_3 &= -s_1 p_x + c_1 p_y \\ p_x &= \rho.\cos\phi = \rho.c_\phi \\ p_y &= \rho.\mathrm{sen}\phi = \rho.s_\phi \end{aligned}\right\}$$

Obtém-se: $c_1 s_\phi - s_1 c_\phi = \dfrac{d_3}{\rho}$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$c_1 s_\phi - s_1 c_\phi = \frac{d_3}{\rho}$$

- Lembrando a fórmula da diferença de ângulos:

$$\operatorname{sen}(\phi - \theta_1) = \frac{d_3}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \cos(\phi - \theta_1) = \pm\sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}}$$

$$\phi - \theta_1 = \operatorname{atan2}\left(\frac{d_3}{\rho}, \pm\sqrt{1 - \frac{d_3^2}{\rho^2}}\right)$$

$$\boxed{\theta_1 = \operatorname{atan2}(p_y, p_x) - \operatorname{atan2}\left(d_3, \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_3^2}\right)}$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$^1n_x = c_{23}.(c_4.c_5.c_6 - s_4.s_6) - s_{23}.s_5.s_6$$
$$^1n_y = -s_4.c_5.c_6 - c_4.s_6$$
$$^1n_z = -s_{23}.(c_4.c_5.c_6 - s_4.s_6) - c_{23}.s_5.c_6$$

$$^1s_x = -c_{23}.(c_4.c_5.s_6 - s_4.c_6) + s_{23}.s_5.s_6$$
$$^1s_y = s_4.c_5.s_6 - c_4.c_6$$
$$^1s_z = s_{23}.(c_4.c_5.s_6 + s_4.c_6) + c_{23}.s_5.s_6$$

$$^1a_x = -c_{23}.c_4.s_5 - s_{23}.c_5$$
$$^1a_y = s_4.s_5$$
$$^1a_z = s_{23}.c_4.s_5 - c_{23}.c_5$$

$$^1T_6 = \begin{bmatrix} ^1n_x & ^1s_x & ^1a_x & ^1p_x \\ ^1n_y & ^1s_y & ^1a_y & ^1p_y \\ ^1n_z & ^1s_z & ^1a_z & ^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^1p_x = -s_{23}.d_4 + c_{23}.a_3 + c_2.a_2$$
$$* \quad ^1p_y = d_3$$
$$^1p_z = -c_{23}.d_4 - s_{23}.a_3 - s_2.a_2$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Agora:

$$\begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1n_x & {}^1s_x & {}^1a_x & {}^1p_x \\ {}^1n_y & {}^1s_y & {}^1a_y & {}^1p_y \\ {}^1n_z & {}^1s_z & {}^1a_z & {}^1p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Assim:

$$c_1 p_x + s_1 p_y = {}^1p_x = -s_{23}.d_4 + c_{23}.a_3 + c_2.a_2$$

$$-p_z = {}^1p_z = c_{23}.d_4 + s_{23}.a_3 + s_2.a_2$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Logo: $$-s_3.d_4 + c_3.a_3 = K$$
- Onde: $$K = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_3^2 - d_4^2}{2a_2}$$
- Seguindo o mesmo método de solução trigonométrica:

$$\boxed{\theta_3 = \operatorname{atan2}(a_3, d_4) - \operatorname{atan2}\left(K, \pm\sqrt{a_3^2 + d_4^2 - K^2}\right)}$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Para obter θ_2:

$$^0T_6 = {}^0T_1(\theta_1).{}^1T_2(\theta_2).{}^2T_3(\theta_3).{}^3T_4(\theta_4).{}^4T_5(\theta_5).{}^5T_6(\theta_6)$$

$$\left[{}^0T_3(\theta_2)\right]^{-1}.{}^0T_6 = {}^3T_4(\theta_4).{}^4T_5(\theta_5).{}^5T_6(\theta_6)$$

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^3T_6$$

Exemplo 1

Robô PUMA 560

$$^{3}n_x = c_4.c_5.c_6 - s_4.s_6$$
$$^{3}n_y = s_5.c_6$$
$$^{3}n_z = -s_4.c_5.c_6 - c_4.s_6$$

$$^{3}s_x = -c_4.c_5.s_6 - s_4.c_6$$
$$^{3}s_y = -s_5.s_6$$
$$^{3}s_z = s_4.c_5.s_6 - c_4.c_6$$

$$^{3}a_x = -c_4.s_5$$
$$^{3}a_y = c_5$$
$$^{3}a_z = s_4.s_5$$

$$^{3}T_6 = \begin{bmatrix} ^{3}n_x & ^{3}s_x & ^{3}a_x & ^{3}p_x \\ ^{3}n_y & ^{3}s_y & ^{3}a_y & ^{3}p_y \\ ^{3}n_z & ^{3}s_z & ^{3}a_z & ^{3}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{3}p_x = a_3$$
$$^{3}p_y = d_4$$
$$* \quad ^{3}p_z = 0$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Assim:

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3n_x & {}^3s_x & {}^3a_x & {}^3p_x \\ {}^3n_y & {}^3s_y & {}^3a_y & {}^3p_y \\ {}^3n_z & {}^3s_z & {}^3a_z & {}^3p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1c_{23}p_x + s_1c_{23}p_y - s_{23}p_z - a_2c_3 = a_3 \\ -c_1s_{23}p_x - s_1s_{23}p_y - c_{23}p_z + a_2s_3 = d_4 \end{cases}$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} c_1 c_{23} p_x + s_1 c_{23} p_y - s_{23} p_z - a_2 c_3 = a_3 \\ -c_1 s_{23} p_x - s_1 s_{23} p_y - c_{23} p_z + a_2 s_3 = d_4 \end{cases}$$

$$s_{23} = \frac{(-a_3 - a_2 c_3) p_z + (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2}$$

$$c_{23} = \frac{(a_2 s_3 - d_4) p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 c_3 + a_3)}{p_z^2 + (c_1 p_x + s_1 p_y)^2}$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Como os denominadores são iguais e positivos:

$$s_{23} = \frac{(-a_3 - a_2c_3)p_z + (c_1p_x + s_1p_y)(a_2s_3 - d_4)}{p_z^2 + (c_1p_x + s_1p_y)^2}$$

$$c_{23} = \frac{(a_2s_3 - d_4)p_z - (c_1p_x + s_1p_y)(a_2c_3 + a_3)}{p_z^2 + (c_1p_x + s_1p_y)^2}$$

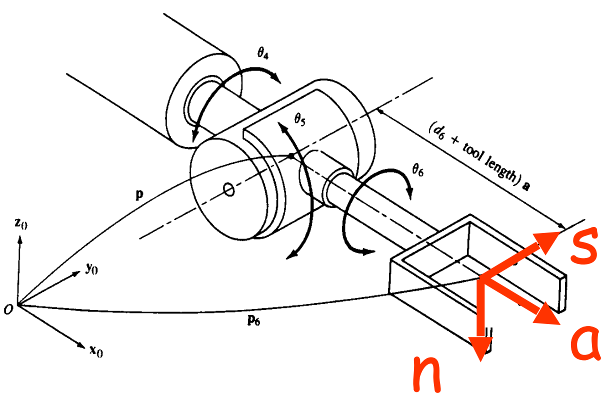
$$\theta_{23} = \mathrm{atan2}[(-a_3 - a_2c_3)p_z - (c_1p_x + s_1p_y)(d_4 - a_2s_3), \ldots$$
$$(a_2s_3 - d_4)p_z - (c_1p_x + s_1p_y)(a_2c_3 + a_3)]$$

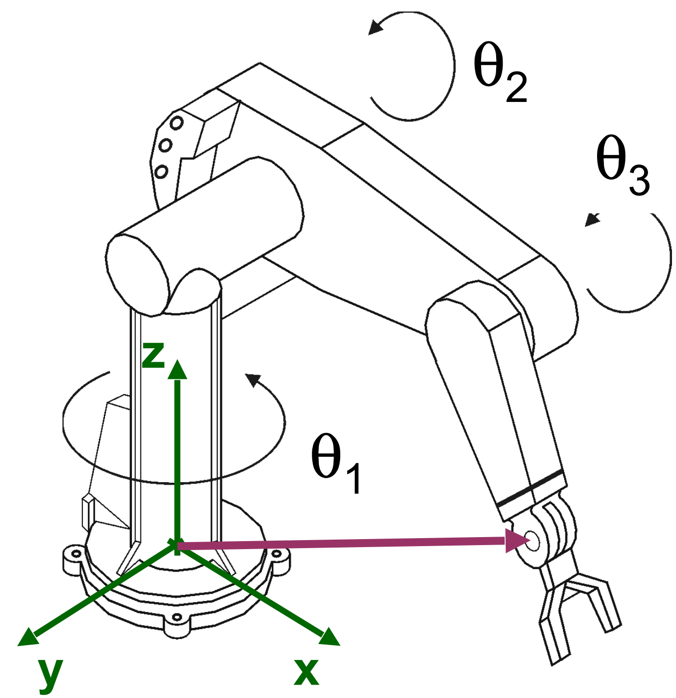
Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$\theta_{23} = \operatorname{atan2}[(-a_3 - a_2 c_3)p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(d_4 - a_2 s_3), \ldots$$
$$(a_2 s_3 - d_4)p_z - (c_1 p_x + s_1 p_y)(a_2 c_3 + a_3)]$$

- Assim:

$$\boxed{\theta_2 = \theta_{23} - \theta_3}$$





Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$^{3}n_x = c_4.c_5.c_6 - s_4.s_6$$
$$^{3}n_y = s_5.c_6$$
$$^{3}n_z = -s_4.c_5.c_6 - c_4.s_6$$

$$^{3}s_x = -c_4.c_5.s_6 - s_4.c_6$$
$$^{3}s_y = -s_5.s_6$$
$$^{3}s_z = s_4.c_5.s_6 - c_4.c_6$$

$$^{3}a_x = -c_4.s_5$$
$$^{3}a_y = c_5$$
$$^{3}a_z = s_4.s_5$$

$$^{3}T_6 = \begin{bmatrix} ^{3}n_x & ^{3}s_x & ^{3}a_x & ^{3}p_x \\ ^{3}n_y & ^{3}s_y & ^{3}a_y & ^{3}p_y \\ ^{3}n_z & ^{3}s_z & ^{3}a_z & ^{3}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{3}p_x = a_3 \quad *$$
$$^{3}p_y = d_4 \quad *$$
$$^{3}p_z = 0 \quad *$$

Exemplo 1

Robô PUMA 560

- Assim, para obter θ_4:

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23} & s_1c_{23} & -s_{23} & -a_2c_3 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 \\ -s_1 & c_1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3n_x & {}^3s_x & {}^3a_x & {}^3p_x \\ {}^3n_y & {}^3s_y & {}^3a_y & {}^3p_y \\ {}^3n_z & {}^3s_z & {}^3a_z & {}^3p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1c_{23}a_x + s_1c_{23}a_y - s_{23}a_z = -c_4s_5 \\ -s_1a_x + c_1a_y = s_4s_5 \end{cases}$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$\begin{cases} c_1 c_{23} a_x + s_1 c_{23} a_y - s_{23} a_z = -c_4 s_5 \\ -s_1 a_x + c_1 a_y = s_4 s_5 \end{cases}$$

- Resolvendo o sistema de equações para $\theta_5 \neq 0$:

$$\boxed{\theta_4 = \text{atan2}[(-a_x s_1 + a_y c_1),(-a_x c_1 c_{23} - a_y s_1 c_{23} + a_z s_{23})]}$$

- Se $\theta_5 = 0 \rightarrow$ posição singular do manipulador...

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Para obter θ_5:

$$^0T_6 = {}^0T_1(\theta_1).{}^1T_2(\theta_2).{}^2T_3(\theta_3).{}^3T_4(\theta_4).{}^4T_5(\theta_5).{}^5T_6(\theta_6)$$

$$\left[{}^0T_4(\theta_4)\right]^{-1}.{}^0T_6 = {}^4T_5(\theta_5).{}^5T_6(\theta_6)$$

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + d_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1s_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & -s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + d_3c_4 + a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^4T_6$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$^4n_x = c_5.c_6$$
$$^4n_y = s_6$$
$$^4n_z = s_5.c_6$$

$$^4s_x = -c_5.s_6$$
$$^4s_y = c_6$$
$$^4s_z = -s_5.s_6$$

$$^4a_x = -s_5$$
$$^4a_y = 0 \quad *$$
$$^4a_z = c_5$$

$$^4T_6 = \begin{bmatrix} ^4n_x & ^4s_x & ^4a_x & ^4p_x \\ ^4n_y & ^4s_y & ^4a_y & ^4p_y \\ ^4n_z & ^4s_z & ^4a_z & ^4p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^4p_x = 0 \quad *$$
$$^4p_y = 0 \quad *$$
$$^4p_z = 0 \quad *$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Para θ_5:

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + d_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1s_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & -s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + d_3c_4 + a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^4T_6$$

- Assim:

$$a_x(c_1c_{23}c_4 + s_1s_4) + a_y(s_1c_{23}c_4 + c_1s_4) - a_z(s_{23}c_4) = -s_5$$

$$a_x(-c_1s_{23}) + a_y(-s_1s_{23}) + a_z(-c_{23}) = c_5$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Assim:

$$\boxed{\theta_5 = \mathrm{atan2}(s_5, c_5)}$$

- Onde:

$$s_5 = -a_x(c_1 c_{23} c_4 + s_1 s_4) - a_y(s_1 c_{23} c_4 + c_1 s_4) + a_z(s_{23} c_4)$$

$$c_5 = a_x(-c_1 s_{23}) + a_y(-s_1 s_{23}) + a_z(-c_{23})$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Para obter θ_6:

$$ {}^{0}T_6 = {}^{0}T_1(\theta_1).{}^{1}T_2(\theta_2).{}^{2}T_3(\theta_3).{}^{3}T_4(\theta_4).{}^{4}T_5(\theta_5).{}^{5}T_6(\theta_6) $$

$$ \left[{}^{0}T_5(\theta_5)\right]^{-1}.{}^{0}T_6 = {}^{5}T_6(\theta_6) $$

$$ \begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + d_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1s_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & -s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + d_3c_4 + a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^{5}T_6 $$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

$$
{}^4T_6 = \begin{bmatrix} {}^4n_x & {}^4s_x & {}^4a_x & {}^4p_x \\ {}^4n_y & {}^4s_y & {}^4a_y & {}^4p_y \\ {}^4n_z & {}^4s_z & {}^4a_z & {}^4p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$${}^4n_x = c_5.c_6$$
$${}^4n_y = s_6$$
$${}^4n_z = s_5.c_6$$

$${}^4s_x = -c_5.s_6$$
$${}^4s_y = c_6$$
$${}^4s_z = -s_5.s_6$$

$${}^4a_x = -s_5 \quad *$$
$${}^4a_y = 0 \quad *$$
$${}^4a_z = c_5 \quad *$$

$${}^4p_x = 0 \quad *$$
$${}^4p_y = 0 \quad *$$
$${}^4p_z = 0 \quad *$$

Exemplo 1
Robô PUMA 560

- Para obter θ_5 e θ_6:

$$^0T_6 = {}^0T_1(\theta_1).{}^1T_2(\theta_2).{}^2T_3(\theta_3).{}^3T_4(\theta_4).{}^4T_5(\theta_5).{}^5T_6(\theta_6)$$

$$\left[{}^0T_4(\theta_4)\right]^{-1}.{}^0T_6 = {}^4T_5(\theta_5).{}^5T_6(\theta_6)$$

$$\begin{bmatrix} c_1c_{23}c_4 + s_1s_4 & s_1c_{23}c_4 - c_1s_4 & -s_{23}c_4 & -a_2c_3c_4 + d_3s_4 - a_3c_4 \\ -c_1s_{23}s_4 + s_1c_4 & -s_1c_{23}s_4 - c_1c_4 & -s_{23}s_4 & a_2c_3s_4 + d_3c_4 + a_3s_4 \\ -c_1s_{23} & -s_1s_{23} & -c_{23} & a_2s_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} n_x & s_x & a_x & p_x \\ n_y & s_y & a_y & p_y \\ n_z & s_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^4T_6$$

Sumário da Aula

-
-
-
- **Exercícios Recomendados**
- Bibliografia Recomendada

Exercícios Recomendados

- Exercícios:
  - Livro do Craig (2005): pp. 128-134
    - Incluindo os exercícios computacionais!!!

Sumário da Aula

-
-
-
-
- **Bibliografia Recomendada**

Bibliografia Recomendada

- **Craig, J.C.**, 2005, *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*, 3rd Edition, Pearson Education Inc., ISBN 0-201-54361-3

- **Paul, R. P.**, 1981, *Robot Manipulators. Mathematics, Programming and Control*, The MIT Press.

- **Fu, K.S.**, **Gonzales, R.C.**, and **Lee, C.S.G.**, 1987, *Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence*, McGraw-Hill Int. Editions, ISBN 0-07-100421-1.

- **Corke, P.**, Robotics Toolbox for MatLab (Release 7).