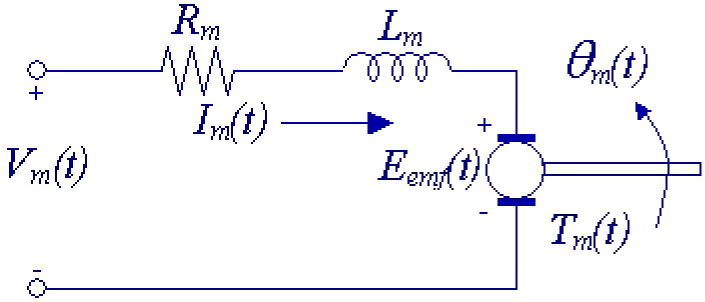
1) Controle de Posição de um Motor DC

1.1) Modelo Dinâmico

O circuito mostrado abaixo representa um motor elétrico:



Usando a Lei de Kirchhoff, temos a seguinte equação:

$$V_m - R_m I_m - L_m \frac{dI_m}{dt} - E_{emf} = 0\,.$$

Considerando $L_m << R_m$, a corrente pode ser escrita como:

$$I_m = \frac{V_m - E_{emf}}{R_m}\,, \qquad (1)$$

sendo a tensão contra eletromotriz dada por:

$$E_{emf} = K_m \dot{\theta}_m\,.$$

No eixo do motor é conectado um redutor, com relação de redução K_g e eficiência η_g. Assim aplicando a segunda lei de Newton no eixo do motor, temos:

$$J_m \ddot{\theta}_m = T_m - \frac{T_l}{\eta_g K_g}\,, \qquad (2)$$

sendo $\frac{T_l}{\eta_g K_g}$ o torque devido a carga que está conectada ao redutor.

Aplicando a segunda lei de Newton na carga conectada ao redutor, temos:

$$J_l \ddot{\theta}_l = T_l - B_{eq} \dot{\theta}_l\,, \qquad (3)$$

sendo B_{eq} o fator de amortecimento viscoso.

Substituindo a equação (2) na equação (3) e reorganizando:

$$J_l \ddot{\theta}_l = \eta_g K_g T_m - \eta_g K_g J_m \ddot{\theta}_m - B_{eq} \dot{\theta}_l \,. \qquad (3)$$

Sabendo que, considerando a redução, $\theta_m = K_g \theta_l$, e que o torque no motor elétrico vale $T_m = \eta_m K_t I_m$ (sendo η_m a eficiência do motor), pode-se reescrever a equação (4) como:

$$J_l \ddot{\theta}_l + \eta_g K_g^2 J_m \ddot{\theta}_l + B_{eq} \dot{\theta}_l = \eta_g \eta_m K_g K_t I_m \,. \qquad (4)$$

Finalmente combinando as equações elétrica (1) e mecânica (4):

$$\left(J_l + \eta_g K_g^2 J_m\right) R_m \ddot{\theta}_l + \left(B_{eq} R_m + \eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2\right) \dot{\theta}_l = \eta_g \eta_m K_g K_t V_m \,. \qquad (5)$$

E aplicando a transformada de Laplace, chegamos à seguinte função transferência:

$$\frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{J_{eq} R_m s^2 + \left(B_{eq} R_m + \eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2\right) s} \,,$$

sendo $J_{eq} = J_l + \eta_g K_g^2 J_m$ o momento de inércia equivalente do motor.

1.2) Respostas no tempo:

Assumindo os seguintes valores para as constantes acima:

Símbolo	Descrição	Valor Nominal (sistema SI de unidades)
η_g	Eficiência da redução	0,9
η_m	Eficiência do motor	0,69
K_g	Fator de redução	70
K_t	Constante de torque do motor	0,00767
K_m	Constante de força contra eletromotriz	0,00767
J_m	Momento de inércia do motor	3,87 e-7
J_{eq}	Momento de inércia equivalente do sistema	2 e-3
R_m	Resistência de armadura	2,6
B_{eq}	Fator de amortecimento viscose	4 e-3

A função transferência do motor é dada por:

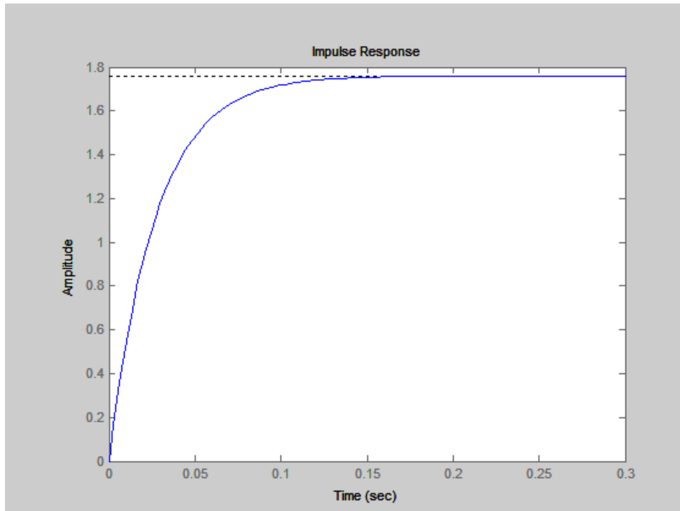
$$\frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{0{,}3334}{0{,}00512s^2 + 0{,}1894s} = \frac{65}{s^2 + 37s}$$

No Matlab:

```
>> num = [65];
>> den=[1 37 0];

>> G = tf(num,den)

G =
     65
  ----------
  s^2 + 37 s

>> pole(G)

ans =

       0
     -37
```

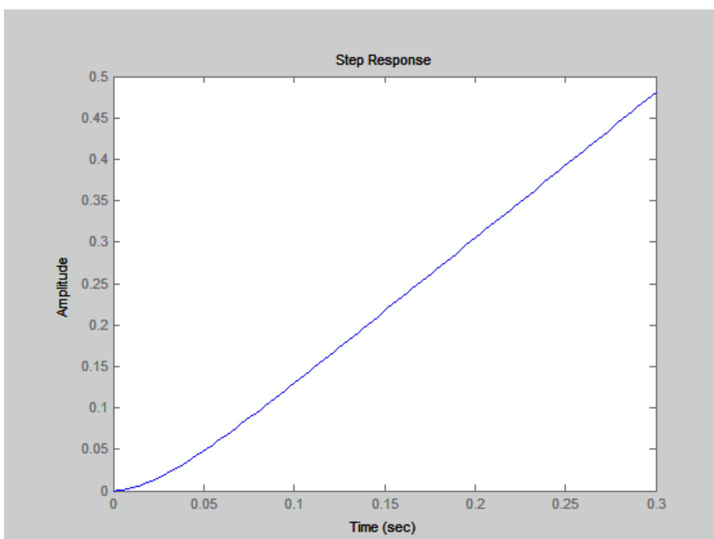
Resposta ao impulso unitário:

>> impulse(G)



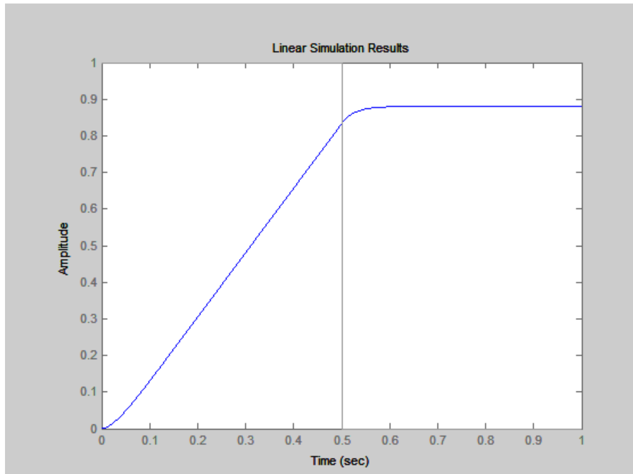
Resposta ao degrau unitário:

>> step(G)



Resposta a um pulso de 0,5 s:

```
>> t = 0:0.0001:1;
>> u=[ones(1,5001) zeros(1,5000)];

>> lsim(G,u,t)
```



1.3) Função de Transferência da Velocidade

Considerando $\dot{\theta}_l = \omega_l$ e $\ddot{\theta}_l = \dot{\omega}_l$, a equação (5) pode ser reescrita como:

$$\left(J_l + \eta_g K_g{}^2 J_m\right) R_m \dot{\omega}_l + \left(B_{eq} R_m + \eta_g \eta_m K_m K_t K_g^2\right) \omega_l = \eta_g \eta_m K_g K_t V_m .$$

Aplicando a transformada de Laplace:

$$G(s) = \frac{\omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{J_{eq} R_m s + B_{eq} R_m + \eta_g \eta_m K_m K_t K_g{}^2},$$

sendo: $J_{eq} = J_l + \eta_g K_g^2 J_m$.

Assim a função transferência utilizando os valores da Tabela 1 é dada por:

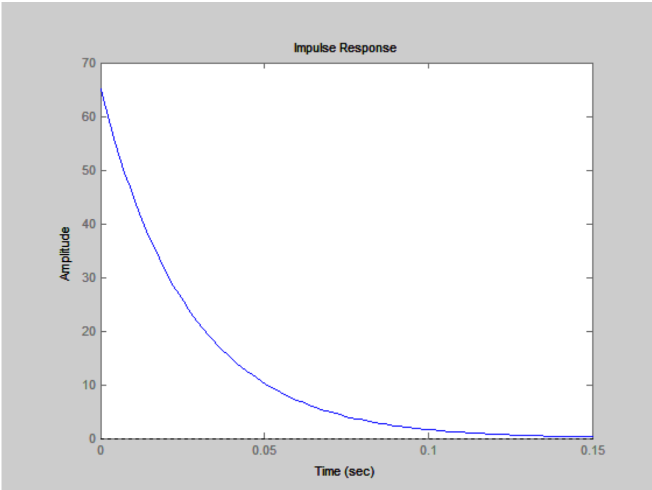
$$\frac{\omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{0{,}3334}{0{,}00512s + 0{,}1894} = \frac{65}{s + 37}$$

No Matlab:

```
>> num = [65];
>> den=[1  37];

>> G = tf(num,den)

Transfer function:
      65
----------------------
s + 37
```

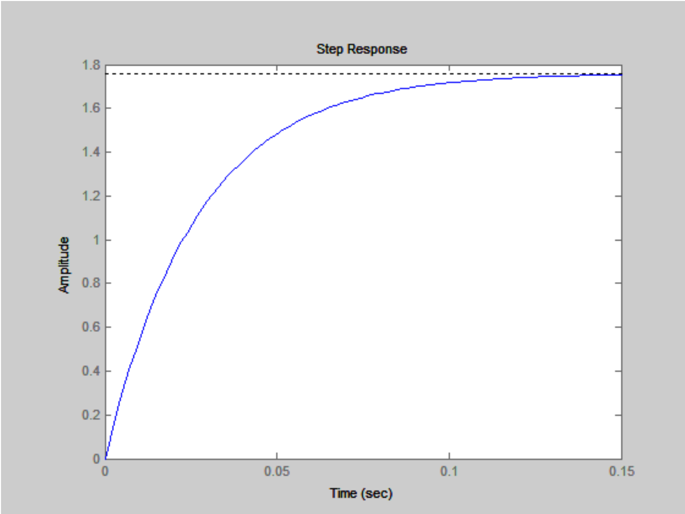
Resposta ao impulso unitário:

```
>> impulse(G)
```



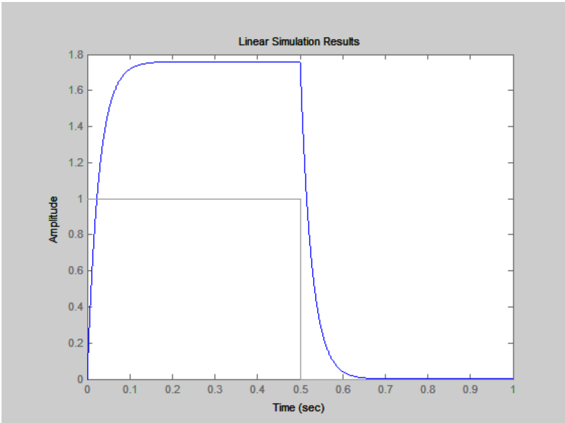
Resposta ao degrau unitário:

```
>> step(G)
```



Resposta a um pulso de 0,5 s:

```
>> t = 0:0.0001:1;
>> u=[ones(1,5001) zeros(1,5000)];

>> lsim(G,u,t)
```



1.3) Controle de Posição – Malha Aberta

Especificações de Desempenho:

- Tempo de Subida, $t_r = 0{,}36$ s
- Sobressinal, $M_p = 10\%$

Em termos de parâmetros de sistema de 2ª. ordem:

- Frequência Natural, $\omega_n = 50$ rad/s
- Fator de Amortecimento, $\zeta = 0{,}6$

Função transferência de Malha Fechada desejada:

$$T(s) = \frac{2500}{s^2 + 60s + 2500}$$

Controlador Malha Aberta:

$$C_{MA}(s) \qquad \text{tal que} \qquad C_{MA}(s)G(s) = T(s) = \frac{2500}{s^2 + 60s + 2500}$$

Controlador Malha Aberta:

$$C_{MA}(s) = \frac{2500}{s^2 + 60s + 2500}\,\frac{s^2 + 37s}{65} = \frac{2500s^2 + 92500s}{65s^2 + 3900s + 162500}$$

SIMULINK

1.4) Controle de Posição – Malha Fechada

Função transferência de Malha Fechada desejada:

$$T(s) = \frac{2500}{s^2 + 60s + 2500}$$

Controlador Malha Fechada, baseado no modelo:

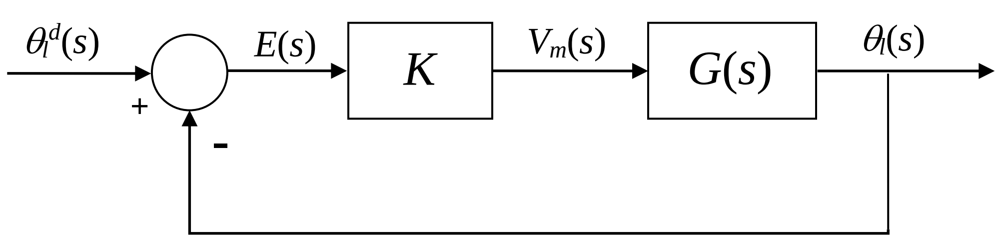
$$C_{MF}(s) \qquad \text{tal que} \qquad \frac{C_{MF}(s)G(s)}{1 + C_{MF}(s)G(s)} = T(s) = \frac{2500}{s^2 + 60s + 2500}$$

Controlador Malha Fechada:

$$C_{MF}(s) = \frac{2500s + 92500}{65s + 3900}$$

SIMULINK

1.5) Controle de Posição - Proporcional



Planta:

$$G(s) = \frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{65}{s^2 + 37s}$$

Controlador:

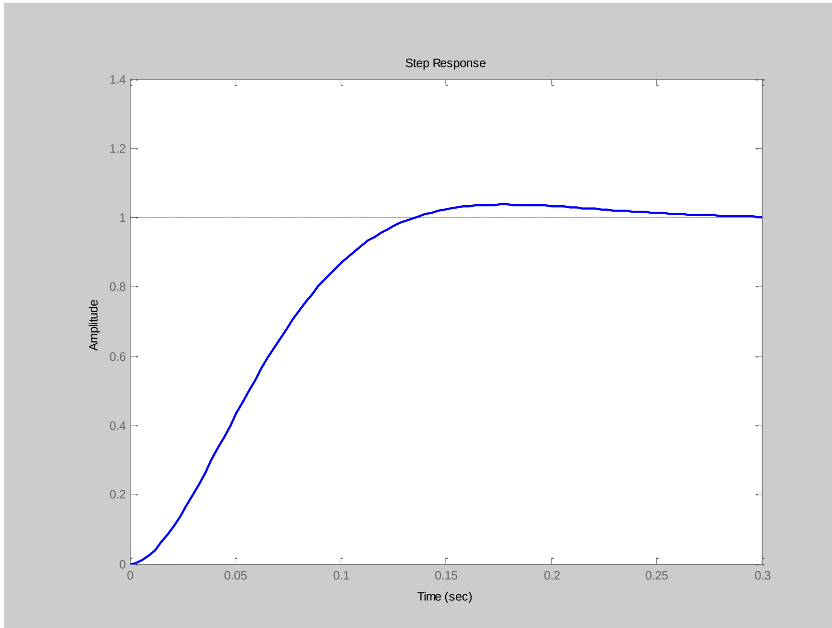
$$C(s) = \frac{V_m(s)}{E(s)} = \text{K}$$

Malha fechada:

$$T(s) = \frac{\theta_l(s)}{\theta_l^d(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{65K}{s^2 + 37s + 65K}$$

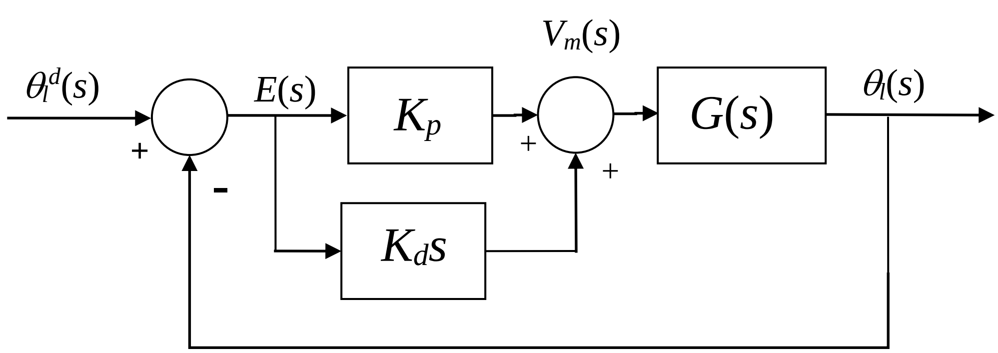
No Matlab: K = 10

```
>> num = [65];
>> den=[1  37 0];

>> G = tf(num,den)

>>C = tf(10,1);

>>CG = series(C,G)

>>T = feedback(CG,1)

>> pole(T)
 -18.4961 +17.5803i
 -18.4961 -17.5803i

>>damp(T)

      Eigenvalue            Damping     Freq. (rad/s)
 -1.85e+001 + 1.76e+001i     7.25e-001      2.55e+001
 -1.85e+001 - 1.76e+001i     7.25e-001      2.55e+001
>> step(T)
```



>> ltiview(T)

1.6) Controle de Posição – Proporcional + Derivativo (PD)



Encontre K_p e K_d tais que: $$T(s) = \frac{2500}{s^2 + 60s + 2500}$$

SIMULINK