1. **Resolução da lista 2 (parte 2).**

1) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis iid, com função densidade de probabilidade

$$f(x) = e^{-(x+0,5)} \text{ se } x \geq -0,5 \text{ e } 0 \text{ cc.}$$

Queremos provar que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} \infty$. Utilizaremos um resultado importante:

Seja $f(x) = e^{-(x-\theta)},\ x \geq \theta$. Definindo $Y = X - \theta$, temos

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(X - \theta \leq y) = P(X \leq y + \theta) = F(y + \theta),$$

logo $g(y) = [F(y+\theta)]' = f(y+\theta) = e^{-(y+\theta-\theta)} = e^{-y} I_{(0,\infty)}(y)$
e portanto $Y \sim Exp(1)$ e $X = Y + \theta,\ \theta > 0$.

No nosso problema $\theta = -0,5$, portanto, $X_i = Y - 0,5$. Então

$$\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mathbb{E}\left[Y\right] - 0,5 = 1 - 0,5 = 0,5$$

e

$$\operatorname{Var}\left(X_i\right) = \operatorname{Var}\left(Y - 0,5\right) = \operatorname{Var}\left(Y\right) = 1,$$

assim temos que as variáveis X_i são integráveis e têm média $0,5$. Pela lei forte de Kolmogorov

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} 0,5.$$

Se uma sequência de variáveis converge quase certamente para um valor então uma função contínua aplicada nesta mesma sequência convergirá quase certamente para a função aplicada neste mesmo valor. Portanto nos é permitido multiplicar ambos os lados da convergência quase certa por n,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} n * 0,5.$$

então

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} \infty,$$

pois dado arbitrariamente $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow S_n > A$.

Em outras palavras, mesmo se escolhermos um número $A > 0$ muito grande então a partir de um número n_0, inevitavelmente, $n * 0,5 > A$.

2)

$$X_n \overset{ind}{\sim} Gama(n, \lambda) \qquad \text{e} \qquad Y_n \overset{ind}{\sim} N\left(\frac{n}{\lambda}, n\lambda\right).$$

queremos mostrar que X_n/Y_n converge em probabilidade.

Note que podemos reescrever essas quantidades como:

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i^*,\ X_i^* \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda) \qquad \text{e} \qquad Y_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i^*,\ Y_i^* \overset{iid}{\sim} N\left(\frac{1}{\lambda}, \lambda\right)$$

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^*}{\sum_{i=1}^n Y_i^*} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^*}.$$

Pela lei forte de Kolmogorov,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^* \overset{q.c.}{\Rightarrow} \mathbb{E}[Exp(\lambda)] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i^* \overset{q.c.}{\Rightarrow} \frac{1}{\lambda}$$

pois os X_i e Y_i são integráveis, isto é, $\mathbb{E}\,|X_i| < \infty$ e $\mathbb{E}\,|Y_i| < \infty$; e $\mathbb{E}\,[X_i] = \frac{1}{\lambda}$ e $\mathbb{E}\,[Y_i] = \frac{1}{\lambda}$.

Um resultado importante garante que a razão de duas sequências de variáveis aleatórias que convergem quase certamente também converge quase certamente se as sequências estão bem definidas (ou seja, o denominador é zero um número finito de vezes).

Portanto,

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^*}{\sum_{i=1}^n Y_i^*} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^*}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i^*} \overset{q.c.}{\Rightarrow} \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1.$$

Como a razão converge quase certamente para 1 e convergência quase certa implica em convergência em probabilidade então a razão de variáveis aleatórias converge em probabilidade para 1.

3) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis iid $N(0,1)$. Queremos encontrar o limite em probabilidade de

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}{(X_1-1)^2 + (X_2-1)^2 + \ldots + (X_2-1)^2}.$$

Note que podemos reescrever essa razão como

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - 2X_i + 1)} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n + \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}{1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}.$$

Vale ressaltar que todos os momentos da distribuição normal são finitos e ela é integrável, portanto podemos aplicar a lei forte dos grandes números na média das variáveis X_i. E

$$\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \text{Var}\left(X_1\right) + \left(\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)^2 = 1 + 0 = 1.$$

Como $\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1 < \infty$ então as variáveis X_1 e X_1^2 são integráveis. Pela lei forte de Kolmogorov temos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} 0$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \overset{q.c.}{\Rightarrow} 1.$$

Finalmente

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i} \overset{q.c.}{\Rightarrow} \frac{1}{1 + 1 - 2 * 0} = \frac{1}{2},$$

pois um resultado importante garante que a razão de duas sequências de variáveis aleatórias que convergem quase certamente também converge quase certamente se as sequências estão bem definidas (ou seja, o denominador é zero um número finito de vezes). Como a razão converge quase certamente para $1/2$ e convergência quase certa implica em convergência em probabilidade então a razão de variáveis aleatórias converge em probabilidade para $1/2$.

4) $\left(X_n\right)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis iid com $\mathbb{E}\left[X_1\right] = \text{Var}\left(X_1\right) = 1$. Queremos encontrar o limite quase certo

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \overset{q.c.}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Note que

$$\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \text{Var}\left(X_1\right) + \left(\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)^2 = 1 + 1 = 2.$$

Como $\mathbb{E}\left[|X_1|^2\right] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 2 < \infty$ então as variáveis X_1 e X_1^2 são integráveis. Pela lei forte de Kolmogorov temos

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{q.c.}{\Rightarrow} 1$$

e

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \overset{q.c.}{\Rightarrow} 2,$$

como a raiz quadrada é uma função contínua então vale

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \overset{q.c.}{\Rightarrow} \sqrt{2},$$

e finalmente

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\frac{1}{n}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{n}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \overset{q.c.}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}},$$

pois um resultado importante garante que a razão de duas sequências de variáveis aleatórias que convergem quase certamente também converge quase certamente se as sequências estão bem definidas (ou seja, o denominador é zero um número finito de vezes).

5) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis iid com ditribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Queremos encontrar o limite em probabilidade de

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(-\ln\left(X_i\right)\right).$$

Definindo $Y_i = -\ln(X_i)$, temos

$$\begin{aligned} G_{Y_i}(y) &= P\left(Y_i \leq y\right) = P\left(-\ln\left(X_i\right) \leq y\right) = P\left(X_i \geq e^{-y}\right) \\ &= 1 - F_{X_i}\left(e^{-y}\right) = 1 - e^{-y} I_{(0,\infty)}(y), \end{aligned}$$

ou seja, $Y_i \overset{iid}{\sim} Exp(1)$. Consequentemente $\mathbb{E}[Y_i] = 1$ e $\mathrm{Var}(Y_i) = 1$. Como Y_i é uma variável não negativa então $\mathbb{E}|Y_i| = \mathbb{E}[Y_i] = 1 < \infty$ e Y_i é integrável.

Como trata-se de uma média aritmética de variáveis (Y_i) independentes, identicamente distribuídas e integráveis com média 1, então pela lei forte de Kolmogorov temos que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i) \overset{q.c.}{\Rightarrow} 1.$$

Como convergência quase certa implica convergência em probabilidade então

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i) \overset{P}{\Rightarrow} 1.$$

E-mail address: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil