1. TÓPICO 3

1.1. **A Lei dos Grandes Números.** Consideremos a variável aleatória X que representa o valor numérico de um experimento aleatório e seja $X_1, X_2, ..., X_n$ uma amostra aleatória de X, isto é, cópias i.i.d. de X, de tamanho n, grande. A Lei dos Grandes Números afirma que a média aritmética dos n valores observados é aproximadamente igual à média de $X, \mu = E[X]$, quando n é grande, isto é

$$\overline{X_n}(w) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i(w)}{n} \to_{n\to\infty} \mu$$

onde $w = (w_1, ..., w_n), X_n(w) = X(w_n)$, w_n são os ensaios sucessivos e w é o experimento composto.

Exemplo 1.1. Considere que nas repetições independentes de um experimento estamos interessados nas ocorrências de um evento A . Definimos a sequência de variáveis aleatórias $(X_n)_{n\geq 1}$

$$X_n = 1 \;\; se \;\; A \;\; ocorreu \;\; na \;\; n-es \;\; realiza c\tilde{a}o; \;\; X_n = 0 \;\; c.c.$$

Desta maneira $P(X_n = 1) = P(A)$. Na n-ésima repetição do experimento calculamos a frequência relativa do evento A, isto é

$$F_n = \frac{\Sigma_{i=1}^{n} X_i}{n} \to_{qc} P(A) = E[X_n].$$

O exemplo justifica o conceito frequêntista de probabilidade.

Se a convergência é quase certa dizemos que a Lei é Forte, se a convergência é em probabilidade dizemos que a Lei é Fraca. Claramente, a Lei Forte implica a Lei Fraca dos Grandes Números.

A Lei Fraca dos Grandes Números

Para provarmos a Lei Fraca dos Grandes Números usaremos a Desigualdade de Markov:

Lema 1.2. *Seja X uma variável aleatória. Para todo ε e r, números reais positivos com $E[|X|^r] < \infty$, temos*

$$P(|X| \geq \varepsilon) > \frac{E[|X|^r]}{\varepsilon^r}.$$

Prova:

$$E[|X|^r] = \int_{-\partial}^{\infty} |x|^r dF(x) = \int_{\{|X|>\varepsilon\}} |x|^r dF(x) + \int_{\{|X|\leq\varepsilon\}} |x|^r dF(x) \geq$$

$$\int_{\{|X|>\varepsilon\}} |x|^r dF(x) \geq |\varepsilon|^r \int_{\{|X|>\varepsilon\}} dF(x) = |\varepsilon|^r P(|X| \geq \varepsilon).$$

Corolário 1.3. *Desigualdade de Tchebyshev. Se X uma variável aleatória com média $E[X] = \mu$ e variância $\sigma^2 < \infty$, $\forall \varepsilon > 0$ temos*

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Prova: *Segue da desigualdade de Markov*

Teorema 1.4. *Lei Fraca dos Grandes Números de Tchebyshev*

Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes com médias μ e variâncias $\sigma^2 < \infty$, comuns, então

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^P \mu.$$

Prova: *Segue da desigualdade de Tchebyshev, desde que $E[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}] = \mu$ e $Var(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}) = \frac{\sigma^2}{n}$.*

Teorema 1.5. *Lei Fraca dos Grandes Números para variáveis aleatórias não correlacionadas.*

Se $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas, isto é, $cov(X_i, X_j) = 0, \forall i, j$, com médias μ e variâncias $\sigma^2 < \infty$, comuns, então

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^P \mu.$$

Prova:

Sabemos que $E[\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}] = \mu$.

$$Var(\overline{X_n}) = E[(\overline{X_n} - \mu)^2] = E[(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \mu)^2] = E[(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{n})^2] =$$

$$\frac{1}{n^2} E[(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu)^2] = \frac{1}{n^2} E\{[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)].[\sum_{j=1}^n (X_j - \mu)]\} =$$

$$\frac{1}{n^2} E[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 + \sum_{i<j}^n (X_i - \mu).(X_j - \mu)] = \frac{1}{n^2}\{\sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] +$$

$$\sum_{i<j}^n E[(X_i - \mu).(X_j - \mu)]\} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 + 0 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Assim, pela Desigualdade de Tchebyshev

$$P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) = P((\overline{X_n} - \mu)^2 > \varepsilon^2) \leq \frac{E[(\overline{X_n} - \mu)^2]}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Na realidade, somente é necessário que os X_i's sejam não correlacionados assintóticamente no sentido: $\lim_{|i-j|\to\infty} cov(X_i, X_j) = 0$.

Teorema 1.6. *Lei Fraca dos Grandes Números para variáveis aleatórias assintóticamente não correlacionadas.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias assintóticamente não correlacionadas, com média comum* μ *e variâncias* $Var(X_i) = \sigma_i^2 < c$, *uniformemente limitadas por uma constante* c. *Então*

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^P \mu.$$

Prova: *Pela desigualdade de Tchebyshev temos*

$$P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{Var(\overline{X_n})}{\varepsilon^2}, \forall \varepsilon > o.$$

Portanto é suficiente provar que $\lim_{n\to\infty} Var(\overline{X_n}) = 0$.

Pela desigualdade de Schwarz temos que $\forall i, j$,

$$|cov(X_i, X_j)| = |E[(X_i - \mu).(X_j - \mu)]| \leq$$

$$\sqrt{E[(X_i - \mu)^2].E[(X_j - \mu)^2]} = \sigma_i \sigma_j \leq c.$$

Como $\lim_{|i-j|\to\infty} cov(X_i, X_j) = 0$ *temos que*

$$\forall \delta > 0, \quad \exists m \in \aleph \quad | \quad se \quad |i - j| > m \to |cov(X_i, X_j)| < \frac{\delta}{2}.$$

Sabemos que

$$Var(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n cov(X_i, X_j) \leq$$

$$\frac{1}{n^2}[\sum_{|i-j|\leq m} nc + \sum_{|i-j|>m} |cov(X_i, X_j)|] \leq$$

$$\frac{n.m.c}{n^2} + \frac{n(n-m)\delta}{2n^2} \leq \delta, \quad para \quad n \geq \frac{2mc}{\delta}.$$

Teorema 1.7. *Lei Fraca dos Grandes Números de Khintchin, para variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com média finita.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com* $E[X_1] = \mu < \infty$.*Então*

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^P \mu.$$

Prova:

Devemos provar que $\forall\varepsilon > 0$ *e* $\forall\delta > 0$, $P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) \leq \delta$.

Sejam $\gamma = E[|X|]$ *e* $\alpha = \frac{\delta.\varepsilon^2}{12.\gamma}$. *Defina a sequência de variáveis aleatórias* $(Y_n)_{n\geq 1}$

$$Y_n = X_n \quad se \quad -\alpha.n \leq X_n \leq \alpha.n \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Então os Y_n*'s são independentes com médias* $\mu_n = \int_{-\alpha.n}^{\alpha.n} ydF(y)$ *e variância* $\sigma_n^2 = \int_{-\alpha.n}^{\alpha.n} y^2 dF(y) - \mu_n^2$.

Claramente, se $n \to \infty$, $\alpha.n \to \infty$ *e* $\mu_n \to \mu$*,isto é*

$$\exists n_0 \quad | \quad \forall n \geq n_0, \to |\mu_n - \mu| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto

$$P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) = P(|\overline{X_n} - \mu_n + \mu_n - \mu| > \varepsilon) \leq P(|\mu_n - \mu| > \frac{\varepsilon}{2}) +$$

$$P(|\overline{X_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \leq P(|\overline{X_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \leq$$

$$P(|\overline{X_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}, \overline{X_n} = \overline{Y_n}) + P(|\overline{X_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}, \overline{X_n} \neq \overline{Y_n}) \leq$$

$$P(|\overline{Y_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(\overline{X_n} \neq \overline{Y_n}).$$

Note que

$$\sigma_n^2 \leq \int_{-\alpha.n}^{\alpha.n} y^2 dF(y) \leq \alpha.n \int_{-\alpha.n}^{\alpha.n} |y| dF(y) \leq \alpha.n.\gamma$$

e pela desigualdade de Tchebyshev temos

$$P(|\overline{Y_n} - \mu_n| > \frac{\varepsilon}{2}) \leq \frac{4\sigma_n^2}{n\varepsilon^2} = \frac{4.\alpha.\gamma}{\varepsilon^2} = \frac{\delta}{3}, \quad para \quad \alpha = \frac{\delta.\varepsilon^2}{12.\gamma}.$$

Em adição temos

$$P(\overline{X_n} \neq \overline{Y_n}) = \sum_{k=1}^{n} P(X_k \neq Y_k) = n.P(|X_1| \geq n.\alpha)$$

$$\leq n \int_{|X| > \alpha.n} dF(x) \leq \alpha^{-1} \int_{|X| > \alpha.n} |x| dF(x) \to 0$$

quando $n \to \infty$.

Assim $\exists n_1 \quad | \quad P(\overline{X_n} \neq \overline{Y_n}) \leq \frac{\delta}{3}, \quad se \quad n \geq n_1$.

Tomando $n \geq \max\{n_0, n_1\}$, *temos* $P(|\overline{X_n} - \mu| > \varepsilon) \leq \delta$.

A Lei Forte dos Grandes Números

Teorema 1.8. *Lei Forte dos Grandes Números para variáveis aleatórias independente e identicamente distribuidas com média finita e existência do quarto momento central.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com $E[|X_1|] = \mu < \infty$ e $E[(X-\mu)^4] = \gamma < \infty$.Então

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^{qc} \mu.$$

Prova:

Observe que

$$E[(\overline{X_n}-\mu)^4] = E[\frac{1}{n^4}(\sum_{i=1}^n X_i - n.\mu)^4] = E[\frac{1}{n^4}(\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^4)] =$$

$$\frac{1}{n^4}E\{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^4 + \sum_{i<j}(X_i-\mu)^3.(X_j-\mu)$$

$$+\sum_{i<j}(X_i-\mu)^2.(X_j-\mu)^2 + \sum_{i<j<k}(X_i-\mu)^2.(X_j-\mu).(X_k-\mu)$$

$$+\sum_{i<j<k<l}(X_i-\mu).(X_j-\mu).(X_k-\mu).(X_l-\mu)\} =$$

$$\frac{1}{n^4}\{\sum_{i=1}^n \gamma + \sum_{i<j} 0 + \sum_{i<j}\sigma^2\sigma^2 + \sum_{i<j<k} 0 + \sum_{i<j<k<l} 0\} =$$

$$\frac{1}{n^4}\{n\gamma + n.(n-1)\sigma^4\} = \frac{\gamma}{n^3} + \frac{(n-1)\sigma^4}{n^3} \leq \frac{\gamma}{n^3} + \frac{\sigma^4}{n^2}.$$

Portanto, pela desigualdade de Markov temos

$$P(|\overline{X_n}-\mu| > \varepsilon) = P((\overline{X_n}-\mu)^4 > \varepsilon^4) \leq \frac{E[(X-\mu)^4]}{\varepsilon^4} \leq \frac{\gamma}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}$$

e

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} P(|\overline{X_n}-\mu| > \varepsilon) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty}(\frac{\gamma}{\varepsilon^4 n^3} + \frac{\sigma^4}{\varepsilon^4 n^2}) < \infty.$$

Pelo Lema de Borel Cantelli concluimos que

$$\overline{X_n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^{qc} \mu.$$

Observação 1.9. Observe que

$$(X-\mu)^4 = X^4 - 4.X^3.\mu + 6.X^2.\mu^2 - 4.X.\mu^3 + \mu^4$$

e

$$E[(X-\mu)^4] = E[X^4] - 4.\mu.E[X^3] + 6.\mu^2.E[X^2] - 4.\mu^3.E[X] + \mu^4.$$

Exemplo 1.10. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória de Bernoulli com parâmetro $p, 0 < p < 1$, então $E[X^k] = p, \forall k$ e

$$E[(X-\mu)^4] = p - 4p^2 + 6P^3 - 4P^4 + p^4 < \infty$$

e $\overline{X_n} \to^{qc} p$.

Exemplo 1.11. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$, então

$$E[X^k] = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

e

$$E[(X-0,5)^4] = E[X^4]-4.0,5.E[X^3]+6.0,25.E[X^2]-4.0,125.E[X]+0,0625 =$$

$$0,2 - 0,5 + 0,5 - 0,25 + 0,0625 = 0,0125 < \infty$$

e $\overline{X_n} \to^{qc} 0,5$.

Exemplo 1.12. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória com distribuição exponencial e parâmetro λ então

$$EX^k] = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k}\int_0^\infty \frac{x^k \lambda e^{-\lambda x}}{k!} dx = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

e

$$E[(X-\frac{1}{\lambda})^4] = \frac{4!}{\lambda^4} - 4.\frac{1}{\lambda}\frac{3!}{\lambda^3} + 6.(\frac{1}{\lambda})^2\frac{2!}{\lambda^2} - 4.(\frac{1}{\lambda})^3.\frac{1}{\lambda} + (\frac{1}{\lambda})^4 = \frac{9}{\lambda^4} = \frac{9}{\lambda^4} < \infty$$

e $\overline{X_n} \to^{qc} \frac{1}{\lambda}$.

Exemplo 1.13. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X. Se X é uma variável aleatória com distribuição normal de média μ e variância σ^2, então $E[(X-\mu)^{2n+1}] = 0$ e $E[(X-\mu)^{2n}] = \sigma^{2n}.[(2n-1).(2n-3)....3.1$. Assim $E([(X-\mu)^4] = 3.\sigma^4$ e $\overline{X_n} \to^{qc} \mu$.

Exemplo 1.14. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. a X, com $E[(X-\mu)^4] = \gamma < \infty$ e $E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$. Então

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n}}{n-1} \to^{qc} \sigma^2.$$

Note que $S_n^2 = \frac{1}{n-1}(\Sigma_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X_n}^2)$.
Por outro lado, pela Lei forte dos grandes números,

$$\frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^n X_i^2 = \frac{n}{n-1}\frac{\Sigma_{i=1}^n X_i^2}{n} \to^{qc} 1.E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

e

$$\frac{n}{n-1}\overline{X_n}^2 \rightarrow^{qc} 1.\mu^2 = \mu^2$$

pois x^2 é uma função contínua de x.

Recordemos P.2 - Se $X_n \rightarrow^{qc} X$ e $Y_n \rightarrow^{qc} Y$, Então

$$X_n \pm Y_n \rightarrow^{qc} X \pm Y.$$

Portanto $S_n^2 = \frac{1}{n-1}(\Sigma_{i=1}^n X_i^2 - n\overline{X_n}^2) \rightarrow^{qc} (\sigma^2 + \mu^2) - \mu^2 = \sigma^2$.

Em termos estatísticos estamos provando que S_n^2 é um estimador consistente para σ^2, pois a convergência quase certa implica a convergência em probabilidade.

No que segue as Leis Fortes de Kolmogorov são enunciadas. O leitor encontrará as provas respectivas provas no livro Probabilidade: um curso em nível intermediário; Barry, R. James.

Teorema 1.15. *Primeira Lei Forte de Kolmogorov.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e integráveis e suponha que

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{Var(X_n)}{n^2} < \infty.$$

Ento

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{E[X_1] + ... + E[X_n]}{n} \rightarrow^{qc} o$$

Teorema 1.16. *A Lei Forte de Kolmogorov.*

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuidas e integráveis com $E[X_n] = \mu$. Então

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \rightarrow^{qc} \mu.$$

Exemplo 1.17. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. comm função densidade de probabilidade

$$f(x) = e^{-x+\theta} \quad se \quad x \geq \theta \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Prove que $\frac{X_1+...+X_n}{n} \rightarrow^{P} 1 + \theta$.

Observe que

$$E[X] = \int_{\theta}^{\infty} xe^{-(x-\theta)}dx = \int_0 2^{\infty}(y+\theta)e^{-y}dy = 1 + \theta.$$

Pela Lei Fraca dos Grandes números concluimos o exercício.

Exemplo 1.18. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. seja $Z_n = (\pi_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}$, a média geométrica de $X_1, ..., X_n, 1 \leq n < \infty$. Mostre que $Z_n \to k$. Qual o valor de k?

Observe que $-\ln Z_n = -\ln[(\pi_{i=1}^n X_i)^{\frac{1}{n}}] = \frac{\sum_{i=1}^n - \ln X_i}{n}$ e que $-\ln X_i$ tem distribuição exponencial padrão. Portanto, pela Lei Fraca dos Grandes Números, $-\ln Z_n \to^P 1$.

Como a função exponencial, a inversa da função logaritmo neperiano, é contínua, concluimos que $Z_n \to^P e$.

Exemplo 1.19. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., com $E[X_1] = Var(X_1) = 1$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n.\sum_{i=1}^n X_i^2}} \to^{qc} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Observe que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n.\sum_{i=1}^n X_i^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}}{\sqrt{\frac{n.\sum_{i=1}^n X_i^2}{n^2}}}.$$

Pela Lei Forte dos Grandes Números temos $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to^{qc} 1$ e $\frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \to^{qc}$ 2.

A convergência quase certa é fechada por quocientes (quando possível) e a raiz quadrada é função contínua.

Exemplo 1.20. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d., com distribuição normal com média μ e variância σ^2. Qual o limite quase certo de

$$\sqrt{\frac{n\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2}{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}}?$$

E-mail address: `bueno@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil