

**MAE 224 - PROBABILIDADE II**  
**Segunda Lista de Exercícios**  
Prof. Vanderlei da Costa Bueno

1) Verifique, nos casos abaixo, se a sequência de variáveis aleatórias  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge. Em caso afirmativo, qual o tipo de convergência e qual a distribuição limite:

a)  $X_n = \log\left\{\frac{1}{1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right\}$ , onde  $X \sim U(0,1)$ .

b)  $X_n = \sum_{k=1}^n \left|\frac{1}{2} - X\right|^{k-1}$ , onde  $X \sim U(0,2)$ .

c)  $X_n = Y_n \cdot Y_{n+1}$  onde  $(Y_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de variáveis aleatórias com  $P(Y_n = 1) = \frac{1}{n}$  e  $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ .

2) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com segundo momento finito. Defina

$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n iX_i.$$

Calcule  $E[X_1]$  e use a desigualdade de Chebyshev para provar que  $Y_n \xrightarrow{P} E[X_1]$ .

3) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com segundo momento finito. Defina

$$Z_n = \left(\prod_{i=1}^n X_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

x

Prove que  $Z_n \xrightarrow{P} c$  e descubra o valor de  $c$ .