## 1. **Resolução da lista 2 (parte 1).**

1)

a)

$$X_n = \ln\left(\frac{1}{1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) = -\ln\left(1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} -\ln\left(1-X+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\ln\left(1-X+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\ln\left(1-X\right),$$

a penúltima igualdade se deve ao resultado: "o limite de uma função contínua é a função contínua do limite", isso é válido pois o logaritmo é uma função contínua.

Agora definiremos $Y = -\ln(1-X)$ e calcularemos sua função de distribuição acumulada.

$$G(y) = P\left(Y \leq y\right) = P\left(-\ln\left(1-X\right) \leq y\right) = P\left(1-X \geq e^{-y}\right)$$

$$= P\left(X \leq 1-e^{-y}\right) = 1-e^{-y}I_{(0,\infty)}(y),$$

pois a função de distribuição acumulada de $X \sim U(0,1)$ é $F(x) = xI_{(0,1)}(x) + I_{[0,\infty)}(x)$ .

Logo $X_n \overset{D}{\Rightarrow} exp(1)$.

b)

$$X_n = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{2}-X\right|^{k-1},$$

onde $X \sim U(0,2)$.

Podemos reescrever $X_n$ como

$$X_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left|1-2X\right|\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\left|2X-1\right|\right)^{k-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\left|2X-1\right|\right)^{0} - \left(\frac{1}{2}\left|2X-1\right|\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}\left|2X-1\right|}$$

$$X_n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\left|2X-1\right|\right)^{n}}{1-\frac{1}{2}\left|2X-1\right|},$$

note que $2X-1 \sim U(-1,3)$, então $X_n$ diverge se $2X-1 \geq 2$ pois neste caso

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\left|2X-1\right|\right)^n=\infty.$$

Caso $2X-1\in(-1,2)$ então a série converge para

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}\left|2X-1\right|},$$

portanto, como encontramos dois limites distintos para $X_n$ então $X_n$ diverge.

c) $P(Y_n=1)=\frac{1}{n}$ e $P(Y_n=0)=1-\frac{1}{n}$ então $\mathbb{E}\left[Y_n\right]=\frac{1}{n}$ e $\operatorname{Var}\left(Y_n\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

Então $Y_n$ converge para uma variável degenerada no ponto zero pois

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[Y_n\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\left(Y_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0.$$

Assim $Y_n\overset{P}{\Rightarrow}0$.

Note que $X_n=Y_nY_{n+1}$, ou seja, $X_n=1$ somente quando $Y_n=1$ e $Y_{n+1}=1$ e $X_n=0$ quando $Y_n=0$ ou $Y_{n+1}=0$. Além disso os $X_n$ não são independentes, pois,

$$P(X_n=0|X_{n-2}=1,X_{n-1}=0)=1\neq P(Y_{n+1}=0)=P(X_n=0|X_{n-2}=1,X_{n-1}=1).$$

Como $\lim_{n\to\infty}P(Y_n=0)=1$ então

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=1)=\lim_{n\to\infty}P(Y_nY_{n+1}=1)=\lim_{n\to\infty}P(Y_n=1,Y_{n+1}=1)\leq\lim_{n\to\infty}P(Y_n=1)=0.$$

Assim $X_n\overset{P}{\Rightarrow}0$.

Poderemos mostrar que $X_n\overset{q.c.}{\Rightarrow}0$ se supormos que os $Y_n$ são independentes.

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n=1)=\sum_{n=1}^{\infty}P(Y_n=1,Y_{n+1}=1)\overset{ind}{=}\sum_{n=1}^{\infty}P(Y_n=1)P(Y_{n+1}=1)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{n+1}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}<\infty,$$

pois trata-se de uma série harmônica de grau 2. Pelo lema de Borel-Cantelli o evento $X_n=1$ ocorre infinitas vezes com probabilidade zero. Portanto o evento $X_n=0$ ocorre infinitas vezes com probabilidade um, como queríamos demonstrar.

2) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas com segundo momento finito.

$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i.$$

Como $\mathbb{E}\left[X_i^2\right] < \infty$ então

$$\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathbb{E}\left[|X_i|^2\right] \geq \mathbb{E}\left[|X_i|\right] \geq \mathbb{E}\left[X_i\right],$$

logo $X_i$ é integrável e tem variância finita, denotaremos $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ e $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \sigma^2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y_n\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right] = \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\mathbb{E}\left[X_i\right] \\ &\overset{idt}{=} \frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} i\mu = \mu\frac{2}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \mu.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(Y_n\right) &= \mathrm{Var}\left(\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i\right) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} iX_i\right) \\ &\overset{ind}{=} \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i^2 \mathrm{Var}\left(X_i\right) \overset{idt}{=} \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} i^2\sigma^2 \\ &= \sigma^2\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \sigma^2\frac{2}{3}\frac{2n+1}{n(n+1)}.\end{aligned}$$

Note que

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[Y_n\right] = \lim_{n\to\infty}\mu = \mu \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}\left(Y_n\right) = \lim_{n\to\infty}\sigma^2\frac{2}{3}\frac{2n+1}{n(n+1)} = 0.$$

Assim, fixado um $\epsilon > 0$, temos, aplicando a desigualdade de Chebyschev,

$$P(|Y_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{\epsilon^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(|Y_n - \mu| > \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Var}(Y_n)}{\epsilon^2} = 0,$$

finalmente, obtemos que $Y_n \overset{P}{\Rightarrow} \mu$.

3) $(X_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência de variáveis independentes e identicamente distribuídas com segundo momento finito e $X_n > 0$.

$$Z_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Como $\mathbb{E}\left[X_i^2\right] < \infty$ então

$$\mathbb{E}\left[X_i^2\right] = \mathbb{E}\left[|X_i|^2\right] \geq \mathbb{E}\left[|X_i|\right] \geq \mathbb{E}\left[X_i\right],$$

logo $X_i$ é integrável e tem variância finita, denotaremos $\mathbb{E}\left[X_i\right] = \mu$ e $\mathrm{Var}\left(X_i\right) = \sigma^2$.

Definindo $W_n = \ln\left(Z_n\right)$, temos

$$W_n = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(X_i\right).$$

Vale ressaltar que como $\ln(\cdot)$ é uma função côncava (segunda derivada negativa), então pela desiguldade de Jensen

$$\mathbb{E}\left[\ln\left(X_i\right)\right] \leq \ln\left(\mathbb{E}\left[X_i\right]\right) = \ln\left(\mu\right) < \infty,$$

definiremos $\mathbb{E}\left[\ln\left(X_i\right)\right] = \mu_*$.

Como $W_n$ é a média aritmética de variáveis $(\ln\left(X_i\right))$ independentes, identicamente distribuídas e integráveis (provaremos que é integrável no final) com média $\mu_*$, então pela lei forte de Kolmogorov temos que $\ln\left(Z_n\right) = W_n \overset{q.c.}{\Rightarrow} \mu_*$. Como a função exponencial, $e^x$, é uma função contínua então vale

$$Z_n = e^{W_n} \overset{q.c.}{\Rightarrow} e^{\mu_*} = e^{\mathbb{E}[\ln(X_i)]}.$$

Como convergência quase certa implica convergência em probabilidade então

$$Z_n \overset{P}{\Rightarrow} e^{\mathbb{E}[\ln(X_i)]}.$$

Prova de que $\ln\left(X\right)$ é integrável, isto é, $\mathbb{E}\left|\ln\left(X\right)\right| < \infty$:

Utilizaremos dois resultados importantes:

(1) Se $Y$ é uma variável não negativa então

$$\mathbb{E}\left|Y\right| = \mathbb{E}\left[Y\right] = \mathbb{E}\left[S(Y)\right],$$

em que $S(y) = 1 - F(y)$ é a função de sobrevivência de $Y$.

(2) (Desigualdade de Markov) Se $Y$ é uma variável não negativa então

$$P(Y \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}\left[Y^k\right]}{\lambda^k},\ \forall\ \lambda, k > 0.$$

Usando o resultado (1), temos

$$\mathbb{E}\left|\ln(X)\right| = \int_0^\infty P\left(\ln(X) > t\right)dt = \int_0^1 P\left(-\ln(X) > t\right)dt + \int_1^\infty P\left(\ln(X) > t\right)dt$$

$$= \int_0^1 P\left(X < e^{-t}\right)dt + \int_1^\infty P\left(X > e^t\right)dt \leq \int_0^1 1dt + \int_1^\infty P\left(X > e^t\right)dt$$

$$= 1 + \int_1^\infty P\left(X > e^t\right)dt$$

agora utilizaremos o resultado (2) que é a desigualdade de Markov com $k = 1$ e $\lambda = e^t$,

$$P\left(X \geq e^t\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left|X\right|}{e^t},$$

aplicando este resultado, temos

$$\leq 1 + \int_1^\infty \frac{\mathbb{E}\left|X\right|}{e^t}dt \leq 1 + \mathbb{E}\left|X\right| \int_1^\infty e^{-t}dt \leq 1 + \mathbb{E}\left|X\right| \int_0^\infty e^{-t}dt = 1 + \mathbb{E}\left|X\right| < \infty,$$

a última desigualdade decorre do fato de $X$ ser integrável. Portanto $\mathbb{E}\left|\ln(X)\right| < \infty$.

Obs: motramos a integrabilidade para o caso contínuo, o resultado para o caso discreto é análogo, basta trocar integrais por somatórios adequadamente.

*E-mail address*: `bueno@@ime.usp.br`

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil