2.3. Quaternions

2.3-1 Interpretação da Multiplicação de Números Complexos

A multiplicação de uma variável complexa por um número complexo de módulo unitário, $e^{i\theta}$, representa uma rotação dessa variável no plano complexo. De fato, seja tal variável representada por $z = z_0 e^{i\varphi}$, Logo, $e^{i\theta} z_0 e^{i\varphi} = z_0 e^{i(\theta+\varphi)}$. Ou seja, z girou "θ" no plano complexo. Poderíamos também ter escrito tal rotação da forma

$$e^{\theta/2} z e^{\theta/2}$$

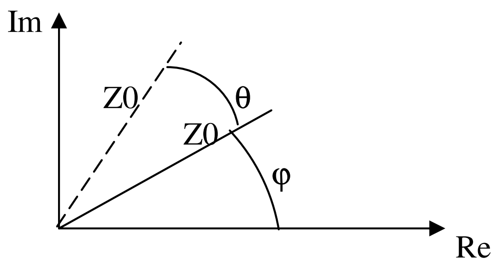

Figura 2.6. Multiplicação de um complexo por outro de módulo unitário.

Esta forma será utilizada na extensão de números complexos a quarternions.

Note que representamos a rotação da variável z em torno de um eixo perpendicular ao plano complexo. Se associarmos um vetor de componentes $z_0 \cos \varphi$ e $z_0 \operatorname{sen} \varphi$, a multiplicação de $e^{i\theta}$ por z pode ser associada a uma rotação desse vetor de um ângulo θ no plano.

2.3-2. *Quaternions: Definições e Propriedades*

Analogamente ao procedimento anterior, para representarmos uma rotação no espaço tridimensional, necessitamos de um número hipercomplexo de módulo unitário. Tal número é conhecido como quaternion, e é representado por:

$$q = q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4 ;$$

Onde os complexos i,j,k possuem as seguintes propriedades:

1) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
2) $ij = k ; jk = i ; ki = j ; ji = -k ; kj = -i ; ik = -j$

Chamamos q_1 de parte "escalar", *S(q),* e $iq_2 + jq_3 + k_{q4}$ de parte "vetorial" do quaternion, *V(q)*. De fato, podemos associar aos complexos i,j,k os versores de um sistema tridimensional e positivo, conforme a propriedade 2) acima.

A adição de 2 quaternions:

$$q = q_1 + iq_2 + jq_3 + k_{q4}$$
$$q' = q'_1 + iq'_2 + jq'_3 + k_{q'_4}$$

é calculada por:

$$\mathrm{q} + \mathrm{q}' \equiv (q_1 + q'_1) + i(q_2 + q'_2) + j(q_3 + q'_3) + k(q_4 + q'_4)$$

E o seu produto é dado por:

$$\begin{aligned} q.q' &= (q_1 + iq_2 + jq_3 + kq_4).(q'_1 + iq'_2 + jq'_3 + kq'_4) = \\ & q_1.q'_1 - (q_2.q'_2 + q_3.q'_3 + q_4.q'_4) + \\ & + \begin{vmatrix} i & j & k \\ q_2 & q_3 & q_4 \\ q'_2 & q'_3 & q'_4 \end{vmatrix} + \\ & + i(q_1q'_2 + q'_1 q_2) + j(q_1q'_3 + q'_1 q_3) + k(q_1q'_4 + q'_1 q_4) \end{aligned}$$

Note que, se pode associar o segundo termo ao produto escalar das partes vetoriais com o sinal trocado, e o terceiro termo representa o produto vetorial dos mesmos. De fato, estes seriam os únicos termos se as partes escalares forem nulas.

$$(q_1 = q'_1 = 0)$$

A partir das propriedades e resultados anteriores, pode-se mostrar que, para quaternions *p, q* e *r*, valem as propriedades associativa e distributiva abaixo:

a) *(pq)r = p(qr);*
b) p(q+r) = pq+ pr

Também se pode mostrar, com relação à propriedade comutativa em relação à multiplicação, que esta só vale para quaternions com partes vetoriais nulas ou linearmente dependentes. Ou seja:

c) pq = qp se e só se V(p) =0 ou V(q) = 0, ou V(p) = α*V(q).*

Utiliza-se, com freqüência, nas aplicações, os conceitos de norma e conjugado de um quaternion. Estes são definidos por:

Conjugado de q: $C(q) = q_1 - iq_2 - jq_3 - kq_4$

Norma de q : $N(q) = q.C(q) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2$

Com relação a estes últimos, novas propriedades podem ser demonstradas:

d) C(qr) = C(r)C(q)
e) N(qr) = N(q)N(r)

A partir da definição de norma, podemos definir o inverso de um quaternion:

$$q^{-1} = \frac{C(q)}{N(q)}$$

onde, supõe-se que *N(q)* é diferente de zero. Note que $N(q)N(q^{-1}) = 1$.

Finalmente, analogamente à representação trigonométrica de números complexos, pode-se expressar o quaternion também por :

$$q = q_o(\cos\theta + e \operatorname{sen}\theta)$$

$$q_o = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} = \sqrt{N(q)}$$

$$\cos\theta = q_1 / q_o;$$

$$\sin\theta = \pm \sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2} \Big/ q_o$$

$$e = \pm\, q_{2i} + q_3 j + q_{4k} \Big/ \sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}$$

2.3-3 Quaternions e a Rotação no Espaço

A rotação de um vetor no espaço, em torno de um determinado eixo, pode ser obtida através de uma operação com quaternions. Sejam *r* e *q* dois quaternions. Pode-se "girar" V(r) em torno de V(q) através da operação:

$$q.r.q^{-1}$$

Vamos mostrar que essa operação é obtida com o operador acima.

O novo quaternion, r'=q.r.inv(q), possui a mesma parte escalar e a mesma norma de r. Somente sua parte vetorial muda de direção. Isto é fácil de verificar:

$$N(r')= N(q).N(r).(1/N(q))= N(r)$$

Seja S(r') a parte escalar. Então:

$$S(r')=S(q.r.inv(q))=S(q.inv(q).r)=S(r)$$

De início, mostremos um caso particular, e mais simples, dessa operação. Seja $r=\sqrt{N(r)}e$. Formemos o triedro **i, j, k** a partir da parte vetorial de *q* e *r*, conforme a figura 2.7. Portanto, ***k*** é ortogonal a este plano.

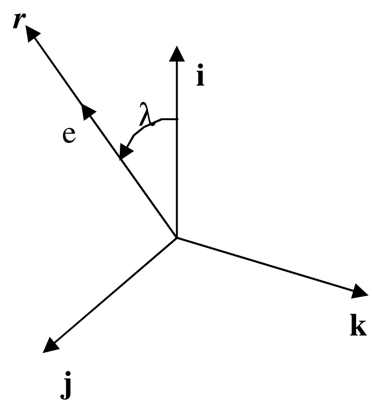

Figura 2.7. Representação da parte vetorial de *r* e sua relação com o triedro (i, j, k).

Ou seja, adotando V(q)=***i***, a representação vetorial de ***j*** é ortogonal a ***i*** e está no mesmo plano de ***i*** e **e**

Conforme representado na figura, ***e*** pode ser expresso por :

$$e = i\cos\lambda + j\,\mathrm{sen}\,\lambda$$

O operador "q", que vai "girar" "r" , é dado por:

$$q = \sqrt{N(q)}\left(\cos\theta + isen\,\theta\right)$$

Calculemos o resultado da operação:

$$r'=[\sqrt{N(q)}\,\left(cos\ \theta+isen\ \theta\right)].[\sqrt{N(r)}\ e].[\frac{1}{\sqrt{N(q)}}\left(cos\ \theta-isen\ \theta\right)]=$$

$$[\left(cos\theta+isen\theta\right)].[\sqrt{N(r)}\left(i\,cos\lambda+jsen\lambda\right)][\left(cos\theta-isen\theta\right)]=$$

$$\sqrt{N(r)}\left(cos\theta+isen\theta\right)\left(i\,cos\lambda+jsen\lambda\right)\left(cos\theta-isen\theta\right)=$$

$$r' = \sqrt{N(r)}e' = \sqrt{N(r)}\left[i\,cos\lambda + j\,cos2\theta sen\lambda + ksen2\theta sen\lambda\right]$$

, cujas componentes são as projeções do novo vetor nos eixos ***i, j,*** **k**, conforme a figura 2.8.

O vetor ***e'*** é, portanto, o resultado da rotação de ***e*** em torno de ***i*** de um ângulo 2θ.

Uma outra interpretação pode ser dada para o resultado acima. Suponha que houvesse um sistema de coordenadas, "*x', y', z'*", solidário ao vetor ***e.*** Ou seja, ele acompanharia o vetor conforme esse girasse. Para esse sistema, o vetor tem sempre as mesmas componentes: $cos\theta\boldsymbol{i}$, $sen\theta\boldsymbol{j}$, $0\boldsymbol{k}$. Em relação ao sistema original (fixo), vamos chama-lo de "X, Y, Z", teríamos X = *x'*, Y=*y'*$cos2\theta$, Z=y'$sen2\theta$.

Portanto, a expressão anterior representa a transformação do sistema móvel(que girou 2θ) em relação ao fixo (coordenadas X, Y, Z, em função de *x', y'* e *z'*).

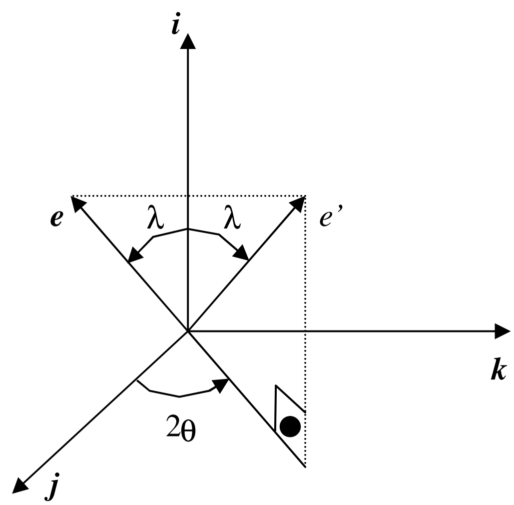

Figura 2.8. Rotação do vetor ***e*** em torno de ***i***.

Podemos estender o resultado anterior utilizando ***a*** e ***b***, quaternions de partes escalar nula e norma unitária.

Sendo

$$p = cos\frac{\alpha}{2} + \boldsymbol{a}sen\frac{\alpha}{2}$$
$$q = cos\frac{\beta}{2} + \boldsymbol{b}sen\frac{\beta}{2}$$

quaternions unitários que operam rotações de α em torno de ***a*** e β em torno de ***b***. A seqüência de rotações (usando a propriedade d))

$$qp(.)p^{-1}q^{-1} = qp(.)(qp)^{-1} = qp(.)\mathrm{C}(qp)$$

representa uma única rotação qp(.) dada pelo quaternion $qp = cos\frac{\gamma}{2} + \boldsymbol{c}sen\frac{\gamma}{2}$. Para verificar esta afirmação, basta substituir *p* e *q* por suas definições na expressão acima, e realizar alguma manipulação trigonométrica.

Ou seja, a seqüência de rotações "*q*" e "*p*" é equivalente a uma rotação de γ em torno de ***c***. Pode-se generalizar esse resultado p/ uma sucessão qualquer de rotações q1, q2, q3...qn.

A aplicação desses resultados na cinemática dos sólidos é evidente. Tomando V(r) como representando o vetor posição de um dos pontos do sólido que realiza uma rotação de θ. O quaternion *"q"* opera uma rotação em torno da direção de $\vec{e}$, equivalente vetorial do quaternion, conforme a representação indicada na figura 2.9. O sentido positivo da rotação é indicado pelo sentido de $\vec{e}$ através da regra da mão direita. Ou seja,

$$q = q_o\left(cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{e} sen\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$= cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{e} sen\frac{\theta}{2};$$

onde

$$\boldsymbol{e} = {iq_2 + jq_3 + kq_4}\Big/{\sqrt{q_2^2 + q_3^2 + q_4^2}} = cos\,\alpha_x i + cos\,\alpha_y j + cos\,\alpha_z k$$

e

$$\vec{e} = cos\,\alpha_x \vec{i} + cos\,\alpha_y \vec{j} + cos\,\alpha_z \vec{k}$$

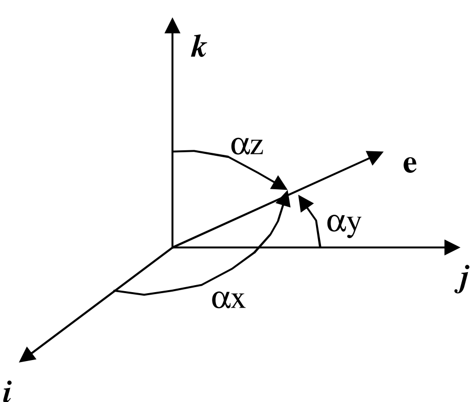

Figura 2.9 Representação do versor *e*, em torno do qual o sólido realiza a rotação.

Assim, o vetor ***r*** é transformado no vetor ***r'*** a partir da rotação de θ em torno do eixo de rotação ***e***, conforme a expressão

$$r' = qrq^{-1}$$

onde,

$$q = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \cos\alpha_x sen\frac{\theta}{2}, \cos\alpha_y sen\frac{\theta}{2}, \cos\alpha_z sen\frac{\theta}{2} \right) =$$
$$e_o + ie_1 + je_2 + ke_3$$

Este resultado é uma expressão do Teorema de Euler, o qual afirma que, qualquer que seja a seqüência de rotações, que leva um sistema de coordenadas a outro, existe um eixo em torno do qual uma única rotação leva o sistema original ao sistema final.

O quaternion acima é conhecido como "quaternion de Euler" e ***eo, e1, e2*** e ***e3*** são os "parâmetros de Euler".

Sejam r =(0,X,Y,Z), as coordenadas do vetor no sistema fixo, e r'=(0,X',Y',Z'), as novas coordenadas do vetor após girar, nesse mesmo sistema fixo.

A operação $r' = qrq^{-1}$ fornece

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 + e_o^2 & 2(e_1e_2 - e_oe_3) & 2(e_1e_3 + e_oe_2) \\ 2(e_1e_2 + e_oe_3) & -e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 + e_o^2 & 2(e_2e_3 - e_oe_1) \\ 2(e_1e_3 - e_oe_2) & 2(e_2e_3 + e_oe_1) & -e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 + e_o^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Lembre, conforme interpretamos anteriormente para o primeiro exemplo (figura 2.9), que o resultado acima pode ser visto como uma relação entre o sistema móvel (que a companha *r*) e o sistema fixo. Ou seja, a matriz acima representa a transformação de coordenadas:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 + e_o^2 & 2(e_1e_2 - e_oe_3) & 2(e_1e_3 + e_oe_2) \\ 2(e_1e_2 + e_oe_3) & -e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 + e_o^2 & 2(e_2e_3 - e_oe_1) \\ 2(e_1e_3 - e_oe_2) & 2(e_2e_3 + e_oe_1) & -e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 + e_o^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Chegamos então à matriz de rotação em termos dos parâmetros de Euler. Cada elemento da matriz acima é igual aos cossenos diretores correspondentes entre os eixos (x,y,z) e (X,Y,Z).

A variação dos "parâmetros de Euler "com o tempo pode ser calculada a partir da expressão da derivada da matriz de cossenos diretores, da relação entre os cossenos e os parâmetros de Euler e da identidade

$$e_o^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$$

A expressão obtida é:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_o \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = 1/2 \begin{bmatrix} e_o & -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_1 & e_o & -e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & e_o & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & e_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix};$$

onde, ω_x, ω_y e ω_z são os componentes da velocidade angular do referencial móvel (velocidade de arrastamento) expressas nos eixos deste mesmo referencial.

Outra forma de representação, que envolve quaternions, pode ser obtida a partir dos parâmetros de Euler. Se dividirmos os parâmetros por $\cos\frac{\theta}{2}$, obteremos o escalar "1" no lugar de *e0* e os seguintes resultados no lugar dos demais parâmetros:

$$g1 = tg\frac{\theta}{2}\cos\alpha_x$$

$$g2 = tg\frac{\theta}{2}\cos\alpha_y$$

$$g3 = tg\frac{\theta}{2}\cos\alpha_z$$

Estes parâmetros são conhecidos como "pârametros de Rodriguez" , que podem ser usados para formar as matrizes de relação entre sistemas de coordenadas e variação com o tempo apresentadas anteriormente. São elas:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+g_1^2-g_2^2-g_3^2 & 2(g_1g_2+g_3) & 2(g_1g_3-g_2) \\ 2(g_1g_2-g_3) & -g_1^2+g_2^2-g_3^2+1 & 2(g_2g_3+g_1) \\ 2(g_1g_3+g_2) & 2(g_2g_3-g_1) & -g_1^2-g_2^2+g_3^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 \\ \dot{g}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+g_1^2 & g_1g_2+g_3 & g_1g_3-g_2 \\ g_1g_2-g_3 & g_2^2+1 & g_2g_3+g_1 \\ g_1g_3+g_2 & g_2g_3-g_1 & g_3^2+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$$

ou, definindo a matriz **G** por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & g_3 & -g_2 \\ -g_3 & 0 & g_1 \\ g_2 & -g_1 & 0 \end{bmatrix}$$

, podemos expressar as derivadas dos parâmetros de Rodriguez através de:

$$\dot{\mathbf{G}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + \mathbf{G})\Omega(\mathbf{I} - \mathbf{G})$$

, onde Ω é a matriz de velocidade angular, já definida.