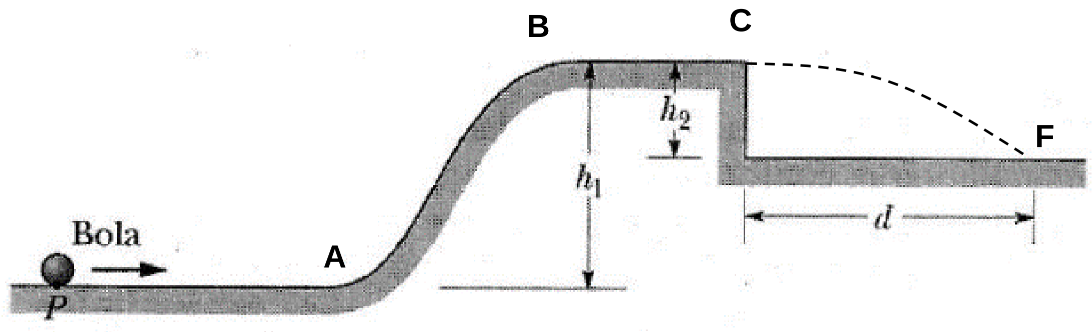
Gabarito – Exercício 4

1) Temos a seguinte situação:



A bola é atirada no ponto P para que ela role sem deslizar ao longo de uma trajetória horizontal (entre P e A), depois para cima ao longo de uma rampa (entre A e B) e finalmente sobre um platô (entre B e C). Ela então deixa o platô (no ponto C) horizontalmente e aterrissa sobre um campo a uma distância d da extremidade do platô (ponto F).

Vamos analisar o movimento ponto a ponto em termos de energia mecânica envolvida.

- Entre P e A
  Nesse trecho a bola está rolando, sem deslizar. Há energia cinética de translação e de rotação. Vamos chamar de E_1.

- Entre A e B
  Parte da energia E_1 é convertida em energia potencial, pois agora a bola se encontra acima da rampa de altura h_1. Vamos chamar a nova energia de E_2.

- Entre B e C
  Aqui a bola continuará a rolar sem deslizar até o ponto C. Novamente há energia cinética de translação e de rotação e mais energia potencial, pois está em cima da rampa. Vamos chamar de E_3.

- Entre C e F
  Como a bola deixa o platô horizontalmente, temos um movimento horizontal com velocidade inicial v e outro vertical com velocidade inicial zero.

Vamos escrever as energias E_1 e E_3, uma vez que E_2 é só um passo intermediário e não nos interessa. Vamos considerar aqui as velocidades da bola como a velocidade do centro de massa da mesma.

Temos que:

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 \qquad (1)$$

Onde I é o momento de inércia da bola, v_i e ω_i são as velocidades de translação e rotação iniciais respectivamente.

Temos ainda que:

$$E_3 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_1 \qquad (2)$$

Onde I é o momento de inércia da bola, v e ω são as velocidades de translação e rotação respectivamente no ponto C.

Agora vamos analisar a queda entre os pontos C e F.

- Movimento Vertical
  A equação que do movimento vertical é dada por:
  $$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3)$$
  Nesse caso adotamos $y_0 = h_2,\ v_0 = 0\ e\ a = -g$. Vamos encontrar o tempo de queda, ou seja, para $y = 0$. O tempo de queda vale:
  $$0 = h_2 - \frac{1}{2}gt^2$$
  $$t = \sqrt{\frac{2\,h_2}{g}} \qquad (4)$$
- Movimento Horizontal
  A equação que do movimento horizontal é dada por:
  $$x = x_0 + v_0 t \qquad (5)$$
  Nesse caso adotamos $x_0 = 0,\ v_0 = v$. Onde v é a mesma velocidade da equação (2). Então no ponto de aterrisagem temos que:
  $$d = v\sqrt{\frac{2\,h_2}{g}}$$
  (6)

Da equação (6) temos que

$$v^2 = \frac{g\,d^2}{2\,h_2}$$

(7)

Agora igualando as equações (1) e (2) e usando o momento de inércia de uma esfera maciça e homogênea $I = \frac{2}{5}\,MR^2$ e ainda $v = \omega R$ teremos que

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgh_1$$

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v_i^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right) + mgh_1$$

$$\frac{v_i^2}{2} + \frac{v_i^2}{5} = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{5} + g\,h_1$$

$$\frac{7}{10}v_i^2 = \frac{7}{10}v^2 + g\,h_1$$

$$v^2 = v_i^2 - \frac{10}{7}g\,h_1$$

(8)

Igualando as equações (7) e (8):

$$v_i^2 - \frac{10}{7}g\,h_1 = \frac{g\,d^2}{2\,h_2}$$

$$v_i^2 = \frac{g\,d^2}{2\,h_2} + \frac{10}{7}g\,h_1$$

$$v_i = \sqrt{\frac{g\,d^2}{2\,h_2} + \frac{10}{7}g\,h_1}$$

(9)

Substituindo os valores abaixo em (9), teremos:

$g = 9{,}8\ m/s^2$
$d = 6\ cm = 6.10^{-2}\ m$
$h_1 = 5\ cm = 5.10^{-2}\ m$
$h_2 = 1{,}6\ cm = 1{,}6.10^{-2}\ m$

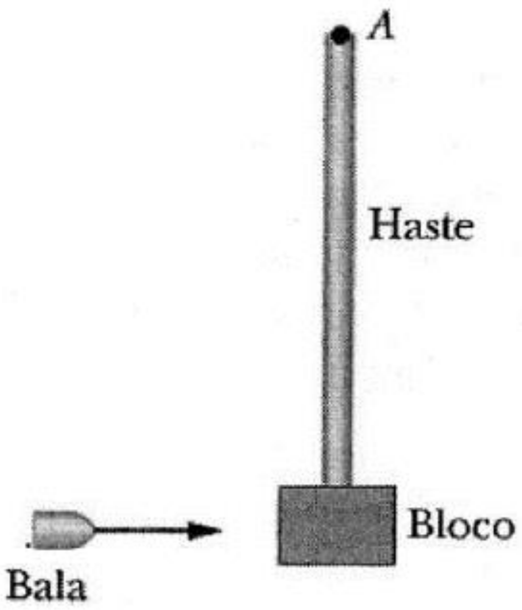
$$v_i = \sqrt{\frac{9{,}8.(6.10^{-2})^2}{2.(1{,}6.10^{-2})} + \frac{10.9{,}8.(5.10^{-2})}{7}}$$

$$v_i \cong 1{,}34\ m/s$$

Se usarmos $g = 10\ m/s^2$ o resultado fica

$$v_i \cong 1{,}36\ m/s$$

2) Temos a seguinte situação:



A bala é disparada em direção ao bloco que está preso em uma haste. Ao penetrar no bloco, o sistema bloco + bala + haste gira em torno do ponto A.

a) Tanto o bloco quanto a bala podem ser tratados com uma partícula, isso implica que o momento de inércia deles é dado por:

$$I_{BALA} = m_{BALA} \, . r^2$$
$$I_{BLOCO} = m_{BLOCO} \, . r^2$$

Onde r² é o tamanho da haste, pois o sistema gira em torno de A. Então o momento de inércia total é dado por:

$$I_{SISTEMA} = I_{BALA} + I_{BLOCO} + I_{HASTE}$$
$$I_{SISTEMA} = m_{BALA} \, . r^2 + m_{BLOCO} \, . r^2 + I_{HASTE}$$

Substituindo

$$I_{HASTE} = 0{,}060 \, kg.m^2, \qquad m_{BALA} = 10g = 0{,}01 \, kg,$$
$$m_{BLOCO} = 0{,}5 \, kg \; e \; r = 0{,}6 \, m$$

teremos que:

$$I_{SISTEMA} = 0{,}01 \, . \, 0{,}6^2 + 0{,}5 \, . \, 0{,}6^2 + 0{,}06$$
$$I_{SISTEMA} = 0{,}2436 \, kg.m^2$$
$$I_{SISTEMA} \cong 0{,}24 \, kg.m^2$$

b) O momento angular inicial do sistema é dado apenas pelo momento angular da bala e é dado por:

$$\overrightarrow{\ell_0} = \vec{r} \times \vec{p} = m_{BALA}(\vec{r} \times \vec{v})$$

O módulo do momento angular será dado por:

$$\ell_0 = m_{BALA}.r.v_0$$

Onde v_0 é a velocidade da bala imediatamente antes de colidir com o bloco e é perpendicular a r.

Já o momento angular do sistema depois da colisão é dado por

$$L = I_{SISTEMA}\ \omega$$

Onde $\omega = 4{,}5\ rad/s$.

Usando o princípio de conservação de momento angular, podemos igualar as expressões. Então:

$$\ell_0 = L$$
$$m_{BALA}.r.v_0 = I_{SISTEMA}\ \omega$$
$$v_0 = \frac{I_{SISTEMA}\ \omega}{m_{BALA}.r}$$
$$v_0 = \frac{0{,}2436\ .\ 4{,}5}{0{,}01\ .\ 0{,}6} = 182{,}7\ m/s$$