Eletromagnetismo I

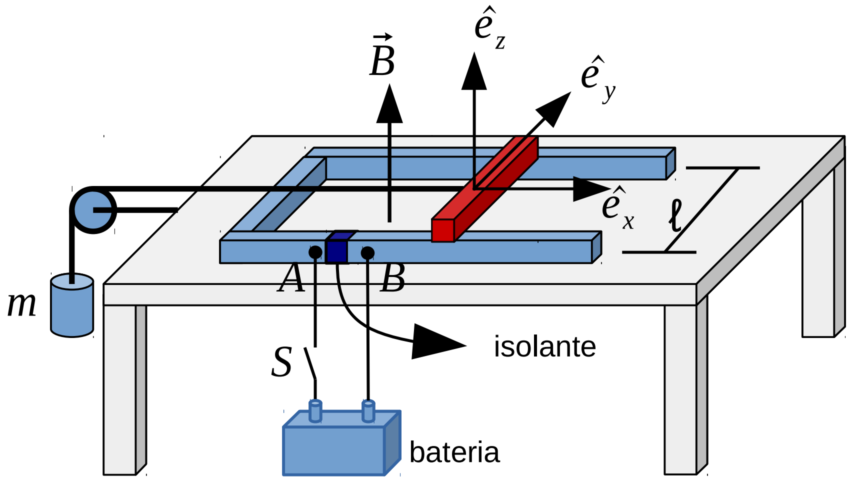
Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

Preparo: Gilson Ronchi

Aula 33

Revisão da prova e Exercícios

P2.D-1 Um exemplo simplista de um "motor elétrico" está esquematizado na figura abaixo. Um trilho metálico condutor, em forma de U, está deitado sobre a mesa. O trilho está interrompido entre os pontos A e B, aos quais uma bateria pode ser ligada através da chave S. Uma barra condutora de resistência R e comprimento ℓ está sobre os trilhos, orientada perpendicularmente a eles (direção y). Um cabo liga a barra a um peso de massa m através de uma roldana presa à borda da mesa. Portanto, se a barra se deslocar para a direita, levanta o peso. O sistema todo está imerso em um campo magnético constante $\vec{B} = B\hat{e}_z$



Análise continuada da questão c) Suponha que a bateria seja ligada numa tensão constante V superior ao valor V_0 (que é a tensão necessária para manter a barra parada). A barra começará, então, a se deslocar para a direita com uma velocidade variável, até atingir uma velocidade terminal v_{term} constante. Qual é a equação de movimento da barra?

Se a barra estiver se deslocando para a direita com uma velocidade instantânea v qualquer, a força eletromotriz induzida será

$$\varepsilon = \oint (\vec{v} \times \vec{b}) \cdot d\vec{\ell} = -\ell B v$$

e, portanto, a corrente total circulando na barra será

$$I = \frac{V - \ell B v}{R}$$

e a força magnética,

$$f_{\text{mag}} = \frac{V \ell B}{R} - \frac{\ell^2 B^2}{R} v$$

A força resultante será a força magnética menos a força peso, portanto,

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{V \ell B}{R} - \frac{\ell^2 B^2}{R} v - mg$$

ou

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\ell^2 B^2}{mR} v = \frac{V \ell B}{mR} - g$$

A solução desta equação diferencial de primeira ordem não homogênea é a solução da equação homogênea mais uma solução particular.

Equação homogênea

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\ell^2 B^2}{mR} v = 0$$

Por análise dimensional, vemos que $\frac{\ell^2 B^2}{mR}$ tem dimensão do inverso de tempo. Então, definimos o tempo característico,

$$\tau = \frac{mR}{\ell^2 B^2},$$

de forma que a equação fica

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0$$

cuja solução é

$$v_{\text{hom}} = A e^{-t/\tau}$$

onde A é uma constante.

Por outro lado, a solução da questão c) da prova nos mostrou que uma solução particular é v_{term} constante; de fato, fazendo $dv/dt = 0$ na equação original, temos

$$v = \frac{V}{\ell B} - \frac{mgR}{\ell^2 B^2} = v_{\text{term}}$$

Então a solução geral da equação é

$$v(t) = Ae^{-t\tau} + v_{\text{term}}$$

A constante A é determinada pela condição inicial, isto é, em $t = 0$ temos

$$v(0) = 0 = A + v_{\text{term}} \quad \rightarrow \quad A = -v_{\text{term}}$$

Então a equação para $v(t)$ é

$$\boxed{v(t) = v_{\text{termo}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

P2.N-1 Em uma região do espaço de altura h há um campo magnético constante $\vec{B} = B_0\hat{e}_z$. Uma espira quadrada de lado a é colocada na vertical, com seu lado inferior na borda desta região, como indicada na Fig.1. A espira tem massa m e resistência R. No instante $t = 0$ a espira é solta, caindo sob efeito da força da gravidade.

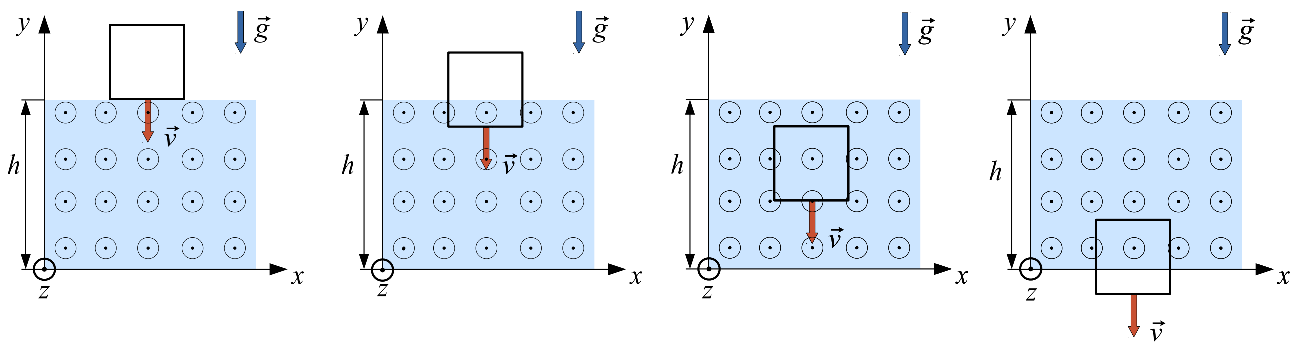


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

Análise continuada da questão b) e c)

Qual é o tempo necessário para a espira entrar totalmente na região com campo magnético supondo que em $t = 0$ a borda espira se encontre em $y = h$? Enquanto a espira não tiver penetrado totalmente na região do campo, a velocidade vai ser dada pela expressão obtida no item c):

$$v(t) = g\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

onde

$$\tau \equiv \frac{mR}{a^2B^2}$$

Como $\vec{v} = -v\hat{e}_y$, e

$$\frac{dy}{dt} = -v = -g\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

então

$$y(t) = C - g\tau\left(t + \tau e^{-t/\tau}\right)$$

Quando $t \to 0$, $y(0) \to h$,

$$\therefore h = C - g\tau\left(0 - \tau e^{-0/\tau}\right) \qquad \to \qquad C = h - g\tau^2$$
$$\therefore \boxed{y(t) = h - g\tau\left[t + \tau\left(1 + e^{-t/\tau}\right)\right]}$$

Então, a espira entrará totalmente dentro do campo magnético quando $y(t_a) = h - a$, ou seja

$$h - a = h - g\tau\left[t_a + \tau\left(1 + e^{-t_a/\tau}\right)\right]$$
$$\boxed{t_a = \frac{a}{g\tau} - \tau\left(1 + e^{-t_a/\tau}\right)}$$

Esta é uma equação transcendental para t_a!

Outros problemas de indução

$\boxed{1}$ Dentro de um círculo de raio a, no plano $z = 0$, o campo magnético é dado por

$$\vec{B} = \frac{B_0}{\rho}\cos(\omega t)\hat{e}_z$$

a) Determine o campo elétrico $\vec{E}$ gerado por esse campo.

O campo magnético possui simetria azimutal, logo o campo elétrico terá apenas uma componente na direção φ: $\vec{E} = E\hat{e}_\varphi$. Usando a versão integral da lei de Faraday,

$$\oint_{C(S)} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \quad \to \quad 2\pi\rho E = \frac{d}{dt}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\rho} \frac{B_0}{\rho'}\cos(\omega t)\rho' d\rho'$$
$$= \begin{cases} -2\pi\rho B_0\omega\sin(\omega t), & \rho \le a \\ -2\pi a B_0\omega\sin(\omega t), & \rho > a \end{cases}$$

Logo,

$$\vec{E} = \begin{cases} -B_0\omega\sin(\omega t)\hat{e}_\varphi, & \rho \le a \\ -\frac{a}{\rho}B_0\omega\sin(\omega t)\hat{e}_\varphi, & \rho > a \end{cases}$$

b) Determine o valor da corrente que fluiria em um anel circular de resistência R coincidente com o círculo.

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{1}{R}2\pi a B_0\omega\sin(\omega t)$$

c) Determine a magnitude do campo magnético que esta corrente geraria no centro do círculo.

A corrente induzida gerará o mesmo campo de um laço de corrente, ou seja

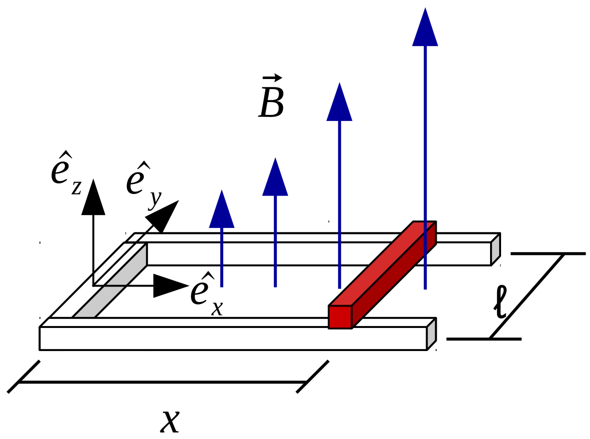
$$\vec{B}_{\text{ind}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\pi a^2 I}{a^3}\hat{e}_z = -\mu_0 \frac{2\pi\omega B_0 \sin(\omega t)}{R}\hat{e}_z$$

2 Uma barra condutora pode deslizar sobre dois trilhos paralelos, também condutores, como indicado na figura. A barra tem resistência R e os trilhos praticamente nenhuma resistência. Perpendicular ao plano dos trilhos, já um campo magnético dado por

$$\vec{B} = B_0\left(1 + \frac{x^2}{L^2}\right)\hat{e}_z$$

onde B_0 e L são constantes. A separação entre os trilhos é ℓ. Através de um mecanismo externo, a barra é posta a oscilar de forma que sua posição é dada por

$$x = L + x_0 \cos(\omega t)$$



a) Determine a expressão da corrente que flui para a barra.

b) Calcule a potência dissipada pelo mecanismo para fazer a barra se mover.

Exercícios extras: Livro texto, questões 7.8, 7.10, exemplo 7.8, 7.16, 7.18, 7.48, 7.50.