

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

## Decaimento Exponencial da espuma da Cerveja

Prática de tratamento de dados em física experimental  
Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimaraes Filho

Rodrigo Y. Sahara - n<sup>o</sup> USP: 5642509

### Resumo

---

O volume de espuma de cerveja decai exponencialmente com o tempo. E com esta propriedade usaremos para demonstrar a lei de decaimento exponencial e a partir dos dados verificaremos se apenas uma exponencial simples é suficiente para ajustar a curva e realizar a comparação com o ajuste com uma exponencial dupla, verificando também a altura inicial e o tempo de duração em duas situações.

---

## 1 Introdução

Este estudo não foi sobre como avaliar os procedimentos de estabilidade da espuma da cerveja ou desenvolvimento de um novo procedimento, mas sim uma abordagem semelhante ao texto de referência - Demonstration of the exponential decay law using beer froth, que a cada intervalo de tempo específico é medida a altura da espuma da cerveja. No trabalho original a medida foi realizada com três tipos de cerveja diferente, neste estudo realizamos a medida com apenas uma cerveja e foi analisado o mesmo ajuste para verificar se uma exponencial simples é o bastante para realizar o ajuste.

## 2 Espuma (Colarinho) da cerveja

Colarinho, espuma ou creme, são seus nomes. A espuma tem como função proteger naturalmente a cerveja, contra a perda de gás carbônico ou oxidação do próprio ar que a incorpora no movimento de levar o copo até a boca.

A formação da espuma ocorre no momento que é servida, com o ar contido dentro do copo é incorporado na cerveja em forma de bolhas. Estas bolhas sobem para a superfície do líquido na área limite com as substâncias da cerveja. Quanto mais substâncias da cerveja se aglomeram na área limite da superfície, mais consistente fica a espuma. O teor de CO<sub>2</sub> da cerveja é responsável pela formação da espuma.

A estabilidade da espuma da cerveja é a capacidade das partículas que estão na área limite formarem uma película elástica. Para formar uma espuma duradoura, estas partículas devem ser capazes de reagir entre si, como oxidar e coagular, formando uma teia resistente e elástica sobre a cerveja.

## 3 Teoria

Leis exponenciais são comuns a muitos fenômenos físicos. Exemplos disso são amplitude de um oscilador sujeitas a fricção linear, a descarga de um capacitor, os pro-

cessos de sistemas de refrigeração ou radioativos. O decaimento exponencial pode ser demonstrada usando a espuma da cerveja, o que reduz o volume exponencialmente com o tempo[1]. A lei exponencial pode ser facilmente derivada da suposição de que o volume da espuma  $dV$  desaparecendo no tempo entre  $t$  e  $t + dt$  é proporcional ao volume  $V$  presente no momento  $t$ ,  $dV = -(V/\tau)dt$ . Em uma caneca de cerveja cilíndrica com uma área  $A$ , o volume é proporcional à altura  $dV = Adh$ . Com isso temos:

$$h^{th}(t) = h(0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1)$$

A constante  $\tau$  é uma constante de decaimento. Ele define o quão rápido a espuma se deteriora durante o tempo  $\tau$ . Diferentes cervejas possuem um parâmetro  $\tau$  diferente.

#### 4 Arranjo e Procedimento experimental

Para este experimento foi utilizado um copo limpo<sup>1</sup> com 6.5 cm de diâmetro foi cheio de cerveja até a espuma atingir o topo do copo. Na frente do copo foi colocada uma régua simples, conforme na figura 1, para servir de referência para as medidas posteriores. Foi utilizada uma câmera de celular para realizar as filmagens.

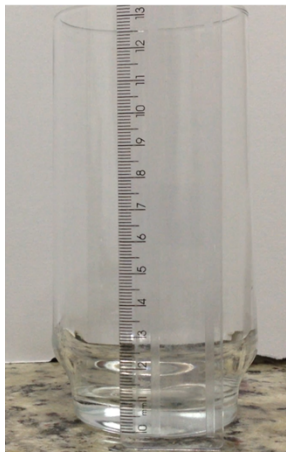


Figura 1: Esquema da montagem para a realização do experimento.

<sup>1</sup> A gordura ou sujeira no copo pode interferir na espuma da cerveja.

<sup>2</sup> Não foi considerada a temperatura após a cerveja ser derramada.

A espuma se forma rapidamente e atinge o máximo da altura do copo em poucos segundos, para formar muita espuma a cerveja foi derramada com a mão a uma altura média de 40 cm, fazendo com que o líquido atinja o fundo do copo. Ao realizar cada medida a cerveja foi retirada da geladeira a uma temperatura de 4°C no início do experimento<sup>2</sup>. A filmagem de cada medida se inicia antes de derramar a cerveja no copo e termina apenas quando é possível ver a cerveja olhando por cima do copo como na figura 2.



Figura 2: Momento quando a filmagem é finalizada.

As medidas das alturas foram tomadas através do software *Tracker*. Através deste software realizamos as medidas da altura da espuma da cerveja, a régua foi utilizada como referência de medida na filmagem, para obter os dados na medida real.

Antes de realizar cada medida, o vídeo foi analisado para poder verificar qual o momento certo de iniciar a medida  $t(0)$ , e também verificar qual a região mais apropriada para medir a altura da espuma da cerveja. A espuma da cerveja não decai de forma uniforme, com isso tomou-se o cuidado de analisar a parte mais apropriada.

A medida se inicia no momento em que a parte líquida da cerveja fique parcialmente nivelada, para que o derramamento da cerveja não influencie na medida da altura, e o término das medidas é ao atingir o es-

tado conforme a figura 2. Mesmo analisando o vídeo para verificar a melhor região estimasse um erro de  $\pm 2mm$  na medida.

Foram considerados dois intervalos de tempo nas medidas das alturas, nos primeiros 100 segundos a partir do início de cada medidas o intervalo foi de 1 segundo, após os 100s as medidas foram tomadas a cada 10 segundos.

## 5 Análises e Resultados

A primeira análise realizada para efeito comparativo foi dos dados obtidos do texto de referência [1], conforme mostrado na figura 3, separamos todos os três gráficos e inserimos os resíduos, para poder verificar a diferença dos dados com o ajuste. O ajuste foi de uma exponencial simples conforme a equação 1. Para a realização do ajuste foi utilizado o software *MatLab*, e a equação gerada como modelo para o ajuste é dada pela equação 2.

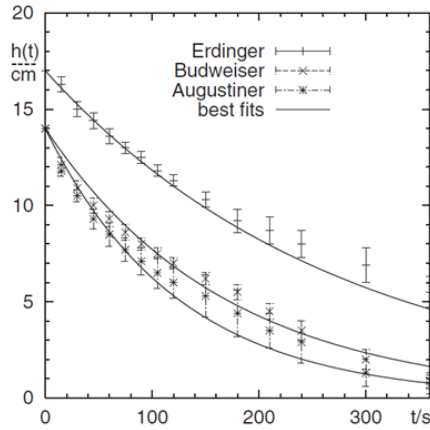


Figura 3: Gráfico retirado do texto de referência, a altura da espuma para diferentes tipos de cerveja [1], tal como função de tempo. São mostrados o dados e os melhores ajustes.

$$\mathbf{A}(1)e^{(-\frac{t}{A(2)})} \quad (2)$$

onde  $A(1)$  e  $A(2)$  são constantes, o valor adotado para o ajuste de  $A(1) = 10.31$ , e o valor de  $A(2)$  está descrito em cada gráfico, sendo que esses valores foram os mesmos adotados no texto de referência[1].

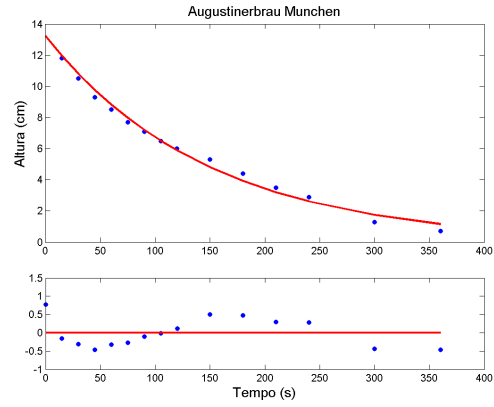


Figura 4: Análise utilizando uma exponencial simples com  $A(2) = 134$ , juntamente com o gráfico de resíduos.

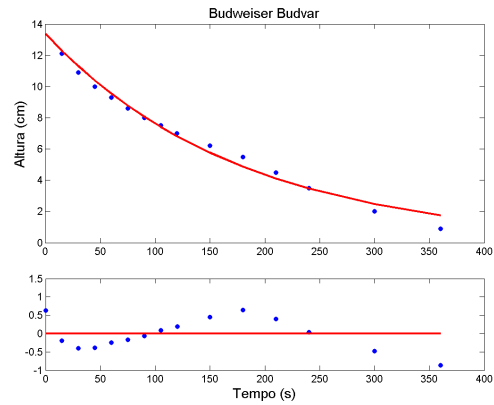


Figura 5: Análise utilizando uma exponencial simples com  $A(2) = 155$ , juntamente com o gráfico de resíduos.

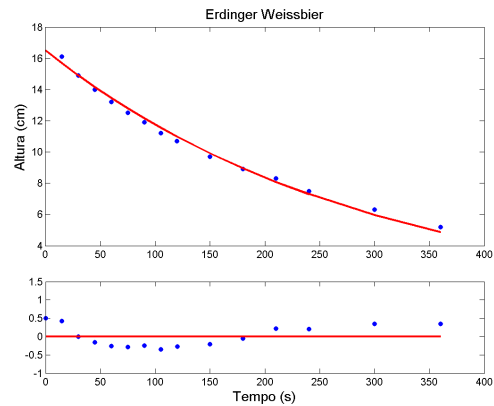


Figura 6: Análise utilizando uma exponencial simples com  $A(2) = 155$ , juntamente com o gráfico de resíduos.

Foi realizada a mesma equação para realizar o ajuste com a exponencial simples, com os dados obtidos da cerveja. A seguir apresentamos os dados obtidos dos ajustes para cada valor de  $A(1)$  e  $A(2)$  que se melhor

ajusta para uma exponencial simples, os valores estão apresentados na tabela 1. Os dados dos vídeos 13 e 16, não se ajustaram muito bem a curva por esse motivo retiramos da análise, demos destaque para os vídeos 1, 3, 4, 5, 9 e 11, por conter uma curva mais evidente conforme mostrada nas figuras 7, 8, 9, 10, 11 e 12.

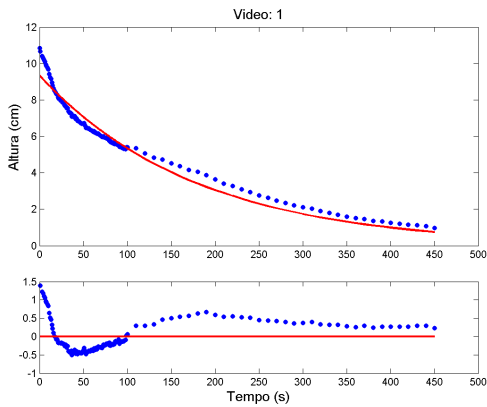


Figura 7: Ajuste com a exponencial simples.

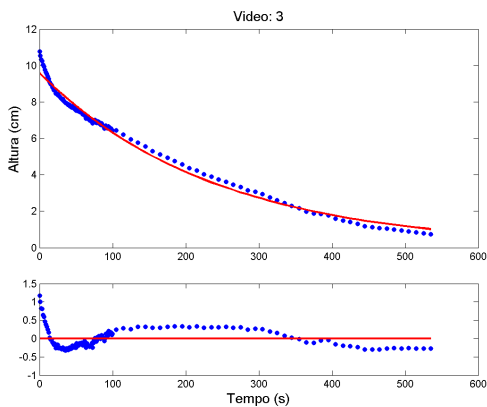


Figura 8: Ajuste com a exponencial simples.

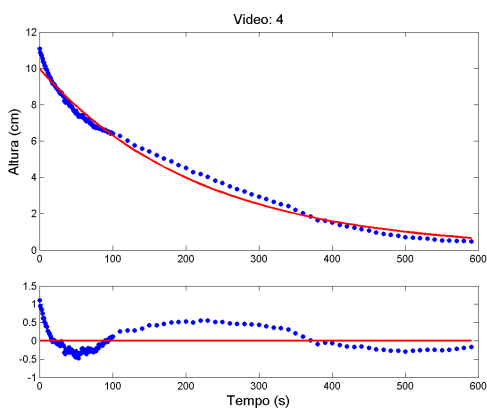


Figura 9: Ajuste com a exponencial simples.

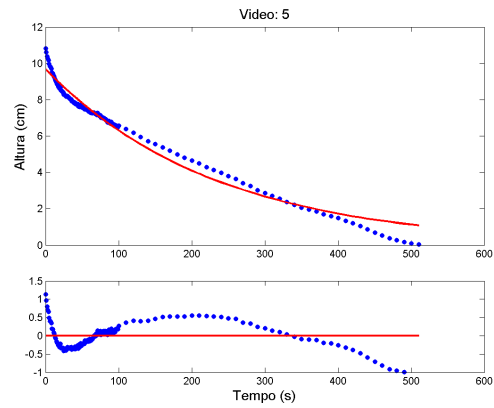


Figura 10: Ajuste com a exponencial simples.

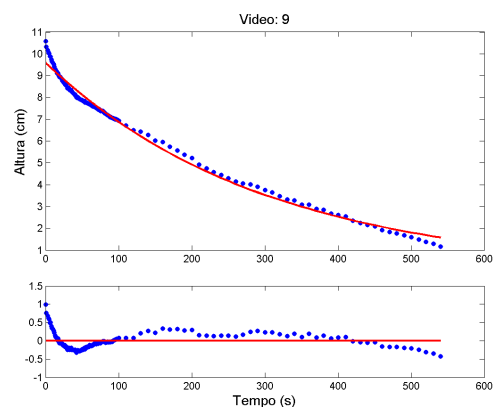


Figura 11: Ajuste com a exponencial simples.

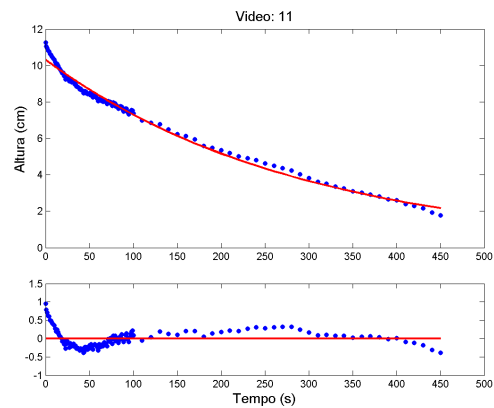


Figura 12: Ajuste com a exponencial simples.

Se analisarmos com atenção o gráfico de resíduos a região entre 0s e 100s, podemos perceber uma curva se destacando neste intervalo, o que mostra que o líquido decai rapidamente nos primeiros segundos, e após mais lentamente. Os dados estão muito afastados da linha de referência, o que mostra que o ajuste não está adequado para a situação. O que também acontece nas figuras 4, 5 e 6.

Vídeo	A1(cm)	$\Delta A1$	A2(s)	$\Delta A2$	$\chi^2$	ngl
1	9.34	0.04	178.6	2.0	680.1	133
2	9.93	0.09	208.2	3.1	75.9	38
3	9.59	0.03	238.8	2.5	271.1	137
4	9.97	0.03	218.3	2.1	404.3	148
5	9.68	0.03	232.9	2.4	508.1	140
6	10.07	0.08	320.2	4.7	52.9	44
7	9.89	0.08	278.2	4.0	62.3	43
8	10.21	0.08	291.4	4.1	93.5	44
9	9.59	0.03	300.0	3.1	192.8	141
10	9.89	0.08	298.0	4.3	72.8	44
11	10.31	0.03	289.5	3.1	205.5	134
12	9.99	0.08	318.5	5.7	47.4	34
14	10.88	0.08	306.9	4.1	34.2	43
15	9.80	0.06	237.0	3.0	177.7	52
17	11.24	0.06	214.8	2.3	182.1	67

Tabela 1: Valores dos ajustes para A(1) e A(2)

Devido a essas diferenças nos gráficos de resíduos das figuras apresentadas até o momento, e pela diferença entre de momentos que ocorre na espuma da cerveja. Percebemos que a equação 1, não continha um ajuste em que minimizava os resíduos. com isso adotamos uma equação exponencial dupla, conforme a equação 3.

$$A(1)e^{(-\frac{t}{A(2)})} + A(3)e^{(-\frac{t}{A(4)})} \quad (3)$$

onde A(1), A(2), A(3) e A(4), são constantes. Com a equação 3 podemos melhorar o ajuste devido a essa diferença entre os dois momentos de decaimento da espuma, uma parte rápida e outra mais lenta.

Primeiramente realizamos os ajustes nos gráficos das figuras 4, 5 e 6, a linha em verde é o ajuste da exponencial simples, a linha vermelha é o ajuste realizado com a equação 3. Nos gráficos dos resíduos também realizamos o comparativo em verde é devido ao ajuste da equação 1 e em azul o ajuste devido a equação 3.

Os novos ajustes estão representados nas figuras 13, 14 e 15. Verificando os novos ajustes pode-se perceber que o ajuste realizado pela exponencial dupla é melhor e os resíduos diminuem muito em comparação ao ajuste realizado pela exponencial simples.

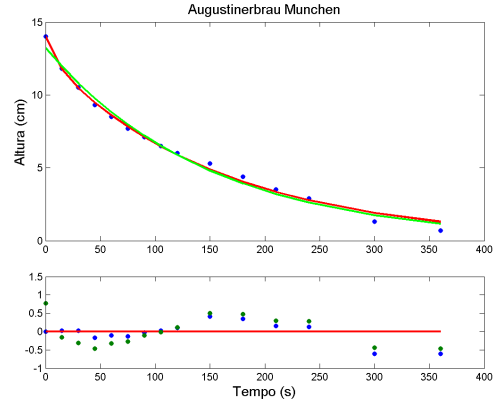


Figura 13: Ajuste com a exponencial dupla (em vermelho), comparada a exponencial simples (verde). A mesma comparação no gráfico de resíduos, em azul a exponencial dupla e em verde a exponencial simples

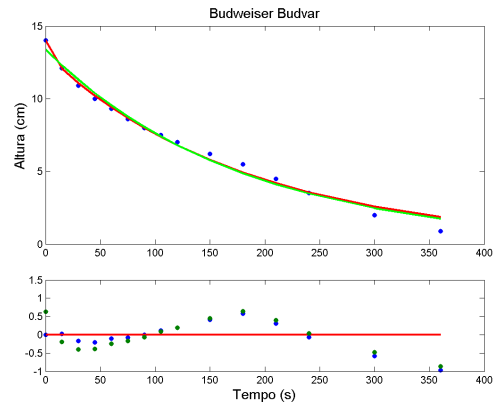


Figura 14: Ajuste com a exponencial dupla (em vermelho), comparada a exponencial simples (verde). A mesma comparação no gráfico de resíduos, em azul a exponencial dupla e em verde a exponencial simples

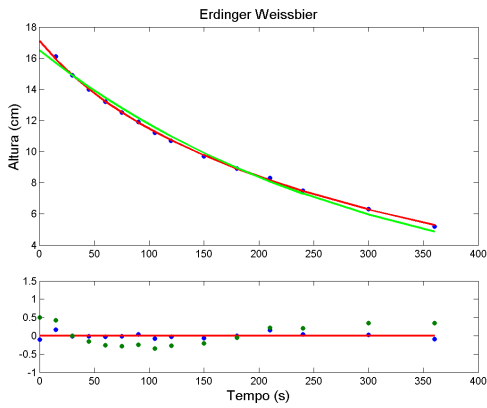


Figura 15: Ajuste com a exponencial dupla (em vermelho), comparada a exponencial simples (verde). A mesma comparação no gráfico de resíduos, em azul a exponencial dupla e em verde a exponencial simples

Os valores para o ajuste de cada cerveja utilizada no texto de referência é apresentada na tabela 2.

A partir dos dados e verificando a diferença de altura e tempo para a parte rápida e lenta da espuma da cerveja podemos notar o seguinte conforme a figura 16.

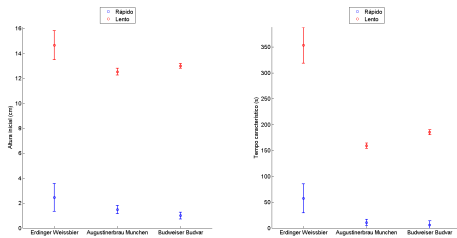


Figura 16: Altura inicial da parte rápida e lenta da espuma da cerveja, a esquerda. E o tempo característico de duração da partes rápidas e lentas da cerveja.

Realizamos os mesmos ajustes com os dados obtidos com a cerveja e estão apresentados nas figuras 17, 18, 19, 20, 21 e 22. Como descrito para os dados do texto de referência o mesmo ocorre para os dados coletados para a cerveja, o ajuste com a exponencial dupla dada pela equação 3 ajusta melhor a curva nos dados coletados. Uma diferença que nota-se é no final da curva que tanto os resíduos quanto o ajuste não se adequam aos dados. No momento da coleta dos dados, quando a espuma da cerveja já esta no seu intervalo de decaimento da parte lenta, a

coleta de dados devido ao comportamento da espuma deve ser mais cuidadoso ao escolher uma região apropriada.

Na figura 23 temos o comparativo da altura inicial da parte rápida e da parte lenta. E o tempo característico das partes lenta e rápida.

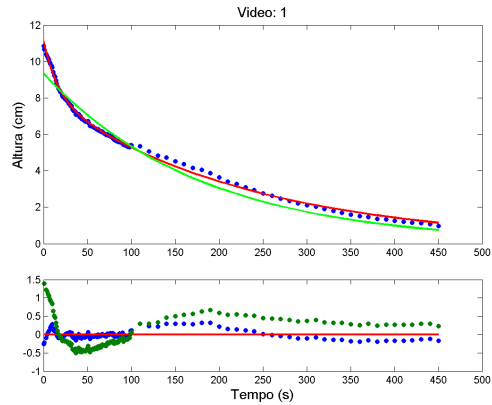


Figura 17: Ajuste com a exponencial dupla(vermelho) comparando com a exponencial simples(verde).

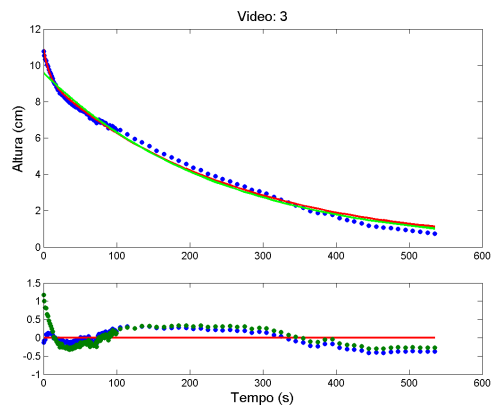


Figura 18: Ajuste com a exponencial dupla(vermelho) comparando com a exponencial simples(verde).

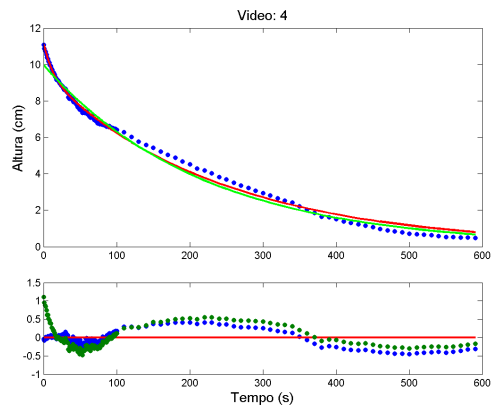


Figura 19: Ajuste com a exponencial dupla(vermelho) comparando com a exponencial simples(verde).

Cerveja	A1(cm)	$\Delta A1$	A2(s)	$\Delta A2$	A3(cm)	$\Delta A3$	A4(s)	$\Delta A4$	$\chi^2$	ngl
Erdinger	9.34	0.04	178.6	2.0	9.34	0.04	178.6	2.0	680.1	133
Augustinerbrau	9.93	0.09	208.2	3.1	9.93	0.09	208.2	3.1	75.9	38
Budweiser	9.59	0.03	238.8	2.5	9.59	0.03	238.8	2.5	271.1	137

Tabela 2: Valores dos ajustes para A(1), A(2), A(3) e A(4)

Vídeo	A1(cm)	$\Delta A1$	A2(s)	$\Delta A2$	A3(cm)	$\Delta A3$	A4(s)	$\Delta A4$	$\chi^2$	ngl
1	2.97	0.11	16.2	1.3	8.15	0.08	230.0	4.5	47.1	131
3	1.58	0.14	8.0	1.3	9.31	0.05	253.0	3.2	110.0	135
4	1.65	0.11	12.8	1.7	9.47	0.06	239.2	3.2	165.5	146
5	1.49	0.14	5.9	1.0	9.45	0.04	244.2	3.0	366.9	138
9	1.28	0.13	9.5	1.6	9.35	0.05	315.8	4.0	67.9	139
11	1.30	0.12	10.5	1.8	10.00	0.05	309.5	4.3	60.0	132

Tabela 3: Valores dos ajustes para A(1), A(2), A(3) e A(4)

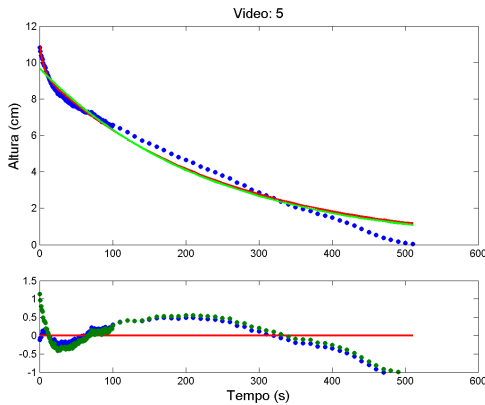


Figura 20: Ajuste com a exponencial dupla(vermelho) comparando com a exponencial simples(verde).

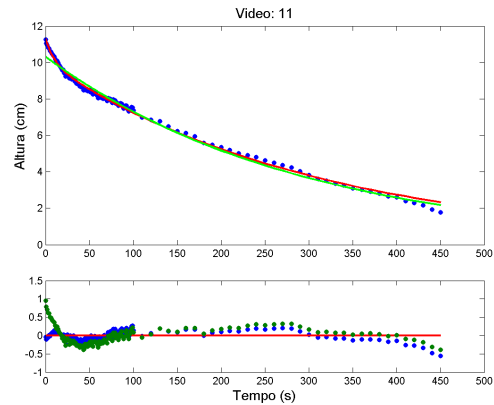


Figura 22: Ajuste com a exponencial dupla(vermelho) comparando com a exponencial simples(verde).

Na figura 21 apresenta um ajuste bem definido, apesar da variação a partir dos 100 segundos, e a diferença entre os dois ajustes são mínimas.

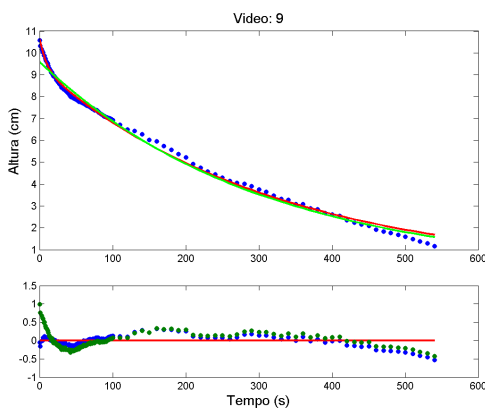


Figura 21: Ajuste com a exponencial dupla(vermelho) comparando com a exponencial simples(verde).

Na tabela 3 está apresentado os valores dos ajustes apenas dos gráficos apresentados, sendo os mais relevantes para o comparativo que está apresentado.

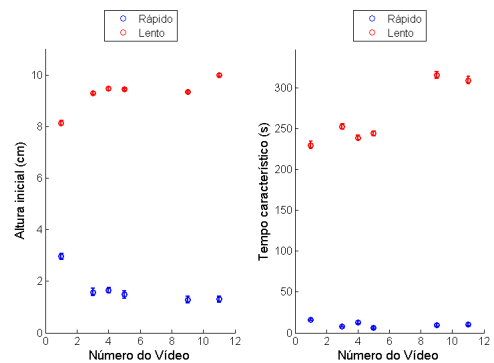


Figura 23: Altura inicial da parte rápida e lenta da espuma da cerveja, a esquerda. E o tempo característico de duração da partes rápidas e lentas da cerveja.



E na figura 24 juntamos os dados da figura 16 e da figura 23. Sendo que os vídeos 18, 19 e 20 correspondem as cervejas Erdinger Weissbier, Augustinerbrau Munchen, Budweiser Budvar respectivamente.

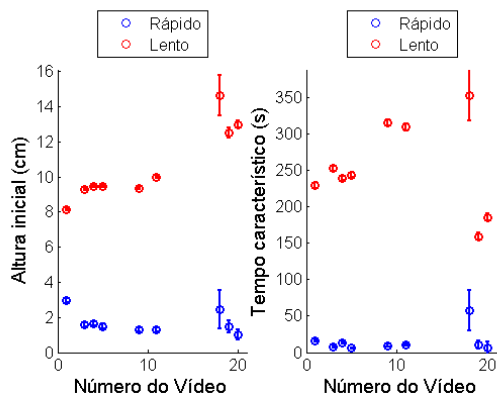


Figura 24: Comparativo com todos os vídeos e as cervejas utilizadas no texto de referência.

Observando os dados coletados nos vídeos e os dados obtidos do texto de referência, percebe-se que a parte rápida tem uma altura inicial na faixa de 2 cm para todos os dados e o tempo característico para é na ordem de um quarto de minutos (15 segundos). Para a parte lenta da espuma da cerveja a altura inicial difere um pouco dos dados coletados com os dados do texto de referência, isso se deve ao fato de ter utilizado um recipiente diferente, mas analisando o tempo característico estão praticamente na mesma faixa na ordem de 5 min a 6 min.

## 6 Conclusão

O colapso da espuma da cerveja é acompanhada por um aumento no volume da cerveja até um determinado tempo na ordem de 5 minutos.

A altura da espuma da cerveja tanto dos dados coletados quanto dos dados do texto de referência, em cada uma das análises realizadas e representadas graficamente, percebeu-se que a taxa de início da decomposição da cerveja não segue uma curva exponencial simples.

Os valores das escalas de tempo tanto da parte rápida quanto da parte lenta estão praticamente na mesma faixa, conforme a figura 24. O que representa que a parte rápida tem um tempo de 15 segundos de duração e a parte lenta tem uma duração de 5 minutos a 6 minutos. E o tempo de decaimento total dura em torno de 8 minutos.

Todas as cervejas analisadas eram envasadas com dióxido de carbono ( $CO_2$ ), e por isso apresentaram um comportamento semelhante.

## 7 Bibliografia

- [1] Leike, A., Demonstration of the exponential decay law using beer froth. Eur. J. Phys., 2002
- [2] <https://edelbrau.wordpress.com/2013/01/16/saiba-qual-e-a-importancia-da-espuma-na-cerveja-e-chopp>
- [3] <http://aartedabebida.blogspot.com.br/2011/07/os-segredos-do-colarinho.html>
- [4] <http://www.papodebar.com/cerveja>
- [5] <http://www.cervejasdomundo.com>
- [6] <http://www.blog.tabernadovale.com.br/2012/04/parte-i-extraido-de-beer-quality.html>