

Universidade De São Paulo

Instituto de Física

Análise de Dados de Intensidade de Força Manual

*Relação entre covariância e independência dos dados
Uma abordagem computacional*

Disciplina: Prática de Tratamento de dados em Física Experimental

Professor: Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho

Aluna: Cibele Gonçalves de Luccas
NUSP: 4186624

São Paulo, 2015

Introdução

Circuitos somatossensitivo-motor envolvem diversas áreas neuronais e suas respectivas performances são, em parte, bem conhecidas e estudadas. Porém, a regulação da força de preensão permanece sem uma delimitação específica referente as áreas/circuitos neuronais. Portanto, o entendimento do controle motor é pertinente ao planejamento de algoritmos usados por dispositivos neuroprostéticos implantados no córtex com o intuito de permitir o controle mais preciso destas próteses.

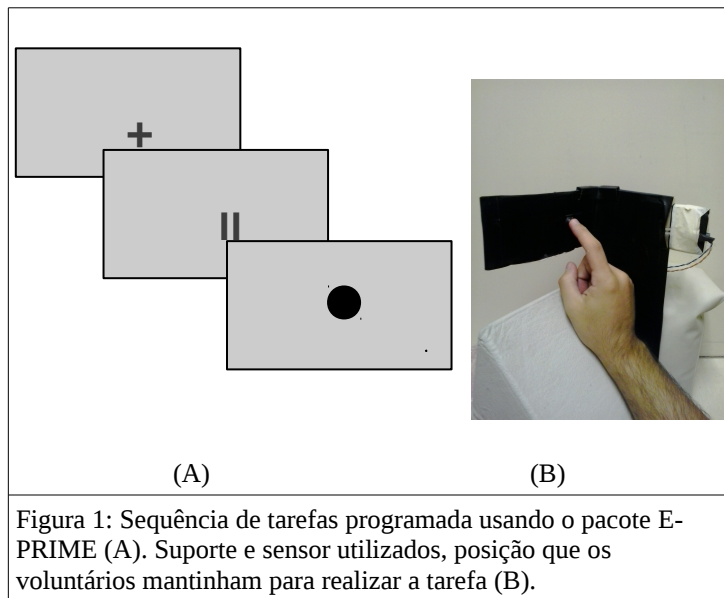
Neste trabalho analisou-se um conjunto de dados referente a diferentes intensidades de força realizadas na superfície de um sensor piezo-elétrico, para compreender como um grupo de indivíduos interpreta e realiza o controle de intensidade de força. Neste estudo, duas abordagens estatísticas foram adotadas, a primeira agrupou-se todos os dados referente a força treinada num único grupo e sua média e incerteza foram calculadas, a segunda separou-se cada momento de “apertada” do sensor como um grupo, suas médias e desvios padrões foram calculados e depois foi feita a média dessas médias e sua incerteza foi obtida por meio da propagação de incertezas. Os resultados finais de média e desvio padrão da média de cada força realizada foram confrontados entre si. Tais resultados mostraram médias iguais porém incertezas com ordem de grandeza diferentes. Na teoria estatística sabe-se que dados independentes deveriam resultar em incertezas de mesma ordem de grandeza ao adotarmos ambas as abordagens. Através de simulação computacional reproduzindo o experimento estudado, constatou-se que de fato os dados deste experimento eram covariantes e a abordagem mais adequada foi a que considerou esta covariância, segunda abordagem.

Objetivo

Este estudo tem por objetivo identificar dados covariantes numa amostra experimental, tal amostra possui um conjunto de forças realizadas em um sensor durante um intervalo de tempo de aproximadamente 5 minutos. Tem-se por objetivo mostrar que ao desconsiderarmos tal dependência entre os dados haverá uma discrepância nos valores de incerteza associados. Através destes dados tentaremos mostrar que havendo covariância entre grupos de dados em uma amostra experimental e esta não for considerada, os valores finais de incerteza podem não representar o fenômeno estudado e, assim, perder sua validade.

Procedimento Experimental

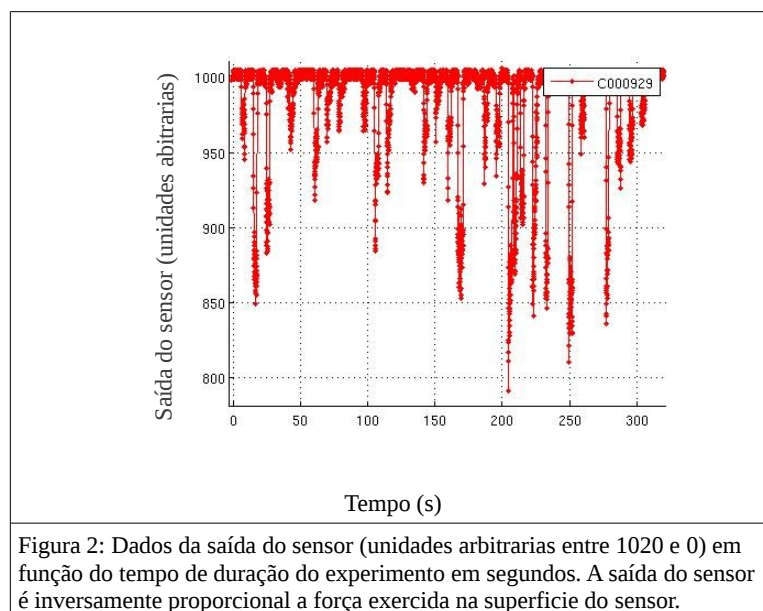
Um grupo de 6 voluntários realizou um experimento que tinha por objetivo estudar a variação de intensidade de força. A tarefa de cada voluntário correspondia em pressionar um sensor de força durante 3 segundos com a intensidade correspondente a instrução dada, tal instrução variava entre três condições, a força treinada por eles anteriormente (força basal de referência), o correspondente ao dobro e ao triplo da força de referência, tais instruções duravam 2 segundos. Estes blocos de instrução-tarefa-descanso se repetiram 27 vezes durante aproximadamente 5 min, fornecendo 9 conjuntos de dados para cada força instruída. Os intervalos de descanso duravam tempos aleatórios, assim como a ordem de aparecimento de cada condição, para evitar o processo de aprendizagem do movimento. Os slides que direcionavam o experimento foram programados e sincronizados usando o pacote E-PRIME e podem ser vistos na Figura 1 abaixo.



O sensor piezo-elétrico possui uma saída basal em torno de 1020, que corresponde a ausência de força relacionada ao pressionamento de sua superfície. Porém, ao ser pressionado, o sensor fornece uma saída com valor menor a basal, sendo a saída do sensor inversamente proporcional a força aplicada. Os dados de força em função do tempo foram obtidos, e com eles foram selecionados os intervalos relacionados ao pressionamento do sensor. A análise dos dados e as simulações realizadas foram feitas utilizando o Matlab versão 2010.

Análise

Com os dados brutos do sensor plotou-se um gráfico de saída do sensor versus tempo para observar a localização das tarefas realizadas. O gráfico de um dos voluntários pode ser observado abaixo:



Em seguida, foi localizado o início das instruções e o início e fim das tarefas de apertada do sensor. Linhas verticais foram plotadas para ajudar nesta localização. Tal procedimento pode ser observado na figura abaixo.

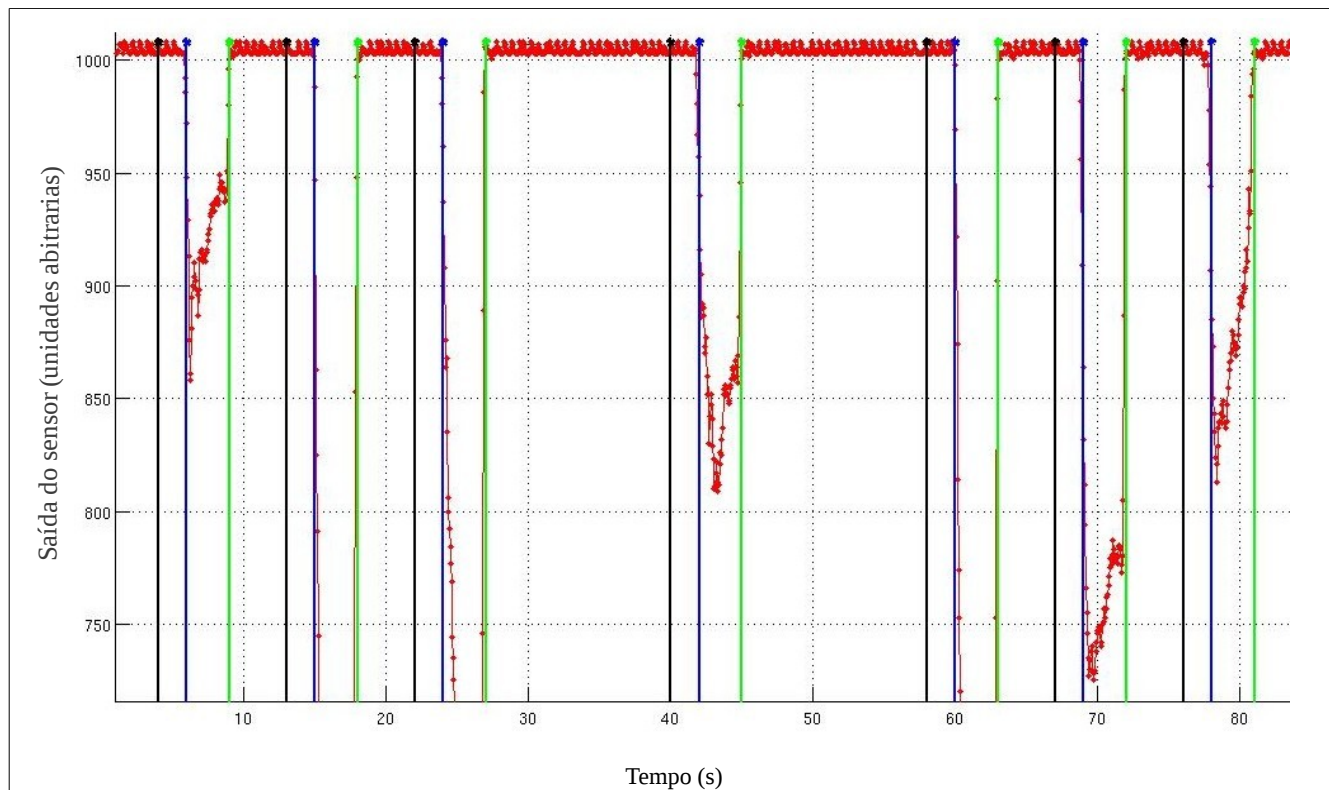


Figura 3: Dados brutos de saída do sensor - pontos em vermelho – (em unidades arbitrárias de força) em função do tempo (em segundos). As linhas verticais em preto mostram o início da instrução, de duração 2 segundos, as verticais em azul mostram o início da tarefa de pressionar o sensor, de duração 3 segundos e as verticais em verde mostram o final da tarefa seguido de descanso de duração aleatória.

Em seguida, tendo os dados correspondentes as tarefas, com seu tempo de início e fim bem determinados, foram retirados em média 1 segundo de dados do início e 0.5 segundos de dados do final de cada atividade, este procedimento foi realizado para garantir que no grupo só existissem dados referente a realização da força pedida e que possíveis atrasos ou adaptações fossem retirados. Após este procedimento foram separados os dados correspondentes a força treinada, ao dobro e ao triplo desta respectivamente através da ordem de aparição das instruções no decorrer do experimento.

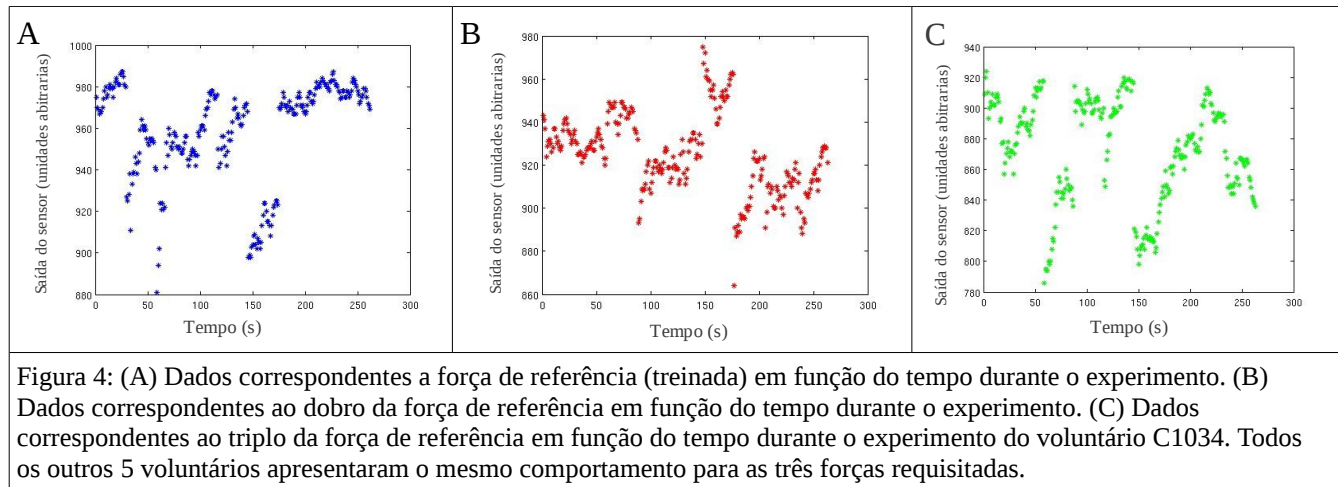
Com os dados de força foram feitas duas análises, a primeira (coluna 1 e 2 da Tabela 1 abaixo) considerou-se os dados de todas as atividades correspondentes a força treinada como um único conjunto de dados e sua média e desvio padrão da média foram estimados para este único grupo. Esta análise considera os dados de cada apertada da força treinada como independentes. A segunda análise separou-se os dados de cada apertada e estimou-se média e desvio padrão da média de cada um dos 9 conjuntos de força 1, em seguida a média das médias foi estimada e o desvio padrão da média foi calculado por meio de propagação das incertezas (coluna 3 e 4 da tabela 1 abaixo). Este procedimento considera possíveis covariâncias existentes em cada apertada. Ambas as análises foram realizadas para as outras forças igualmente. Todos os resultados obtidos para todas as forças realizadas podem ser vistos na Tabela 1 abaixo.

Tabela 1: Dados de média e desvio padrão da média para cada voluntário considerando os dados independentes e considerando os dados covariantes a cada apertada das forças treinada (1), o dobro (2) e o triplo (3) da força de referência.

Média da Força 1 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 1 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
967.2	1.4	967.2	7.5
862.5	2.1	862.4	10.3
970.9	0.6	970.9	2.3
805.9	3.9	805.7	18.6
958.3	1.5	958.2	7.4
988.2	0.3	988.2	1.1
Média da Força 2 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 2 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
956.2	2.1	956.6	11.1
723.1	2.8	723.1	15.2
960.8	1.2	960.9	5.5
702.0	4.7	702.1	25.9
924.9	1.1	924.9	5.7
960.9	1.6	960.9	8.7
Média da Força 3 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 3 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
896.3	2.6	896.3	14.1
603.9	2.7	603.9	14.1
939.0	1.4	939.0	5.7
696.7	4.3	696.5	22.9
872.4	2.1	872.7	10.6
878.9	2.5	878.9	13.6

Como pode-se observar na Tabela 1 acima, os dados dos desvios padrões da média são diferentes quando considerou-se os dados independentes e quando considerou-se os dados covariantes. Esta discrepância envolve ordens de grandeza bem distintas das incertezas entre as duas abordagens. Se os dados fossem de fato independentes, ambas as análises obteriam valores aproximados do desvio padrão da média. Desta forma, prova-se que os dados não são independentes dentro de cada apertada do sensor, e que não considerar esta covariância limita a interpretação dos dados.

Após esta constatação, plotou-se os dados de força 1 de cada apertada em função do tempo de cada voluntário para observar o comportamento dos mesmos no decorrer do experimento. Os intervalos de intrusão e descanso foram retirados do gráfico para melhor visualização. O mesmo processo foi realizado para as forças 2 e 3 respectivamente. Este processo mostrou que a cada apertada os dados oscilavam em torno de valores médios distintos, mostrando a existência de erros sistemáticos diferentes a cada apertada. O conjunto de dados correspondentes a força treinada, ao dobro e ao triplo durante o experimento de apenas um voluntário, C1034, pode ser visualizado abaixo.



Por meio da Figura 4 pode-se observar que existem 9 conjuntos distintos de dados dentro de cada grupo de força A, B e C. Pode-se inferir que dentro de cada um destes 9 conjuntos distintos os dados covariam entre si, e que cada conjunto varia em torno de um valor médio distinto. Tal fato, mostra que cada tarefa de pressionar o sensor, como a força treinada por exemplo, possuem erros sistemáticos distintos. E que cada conjunto tem uma fonte de erro tanto de manter o sensor pressionado com a força pedida, erro aleatório, quanto o erro de tentar reproduzir a força requerida a cada apertada, erro sistemático. Portanto, as condições de reprodução da força treinada no primeiro momento do experimento não possui as mesmas condições das outras vezes que a força treinada foi realizada, o mesmo vale para as outras forças, dobro e triplo. Com isso, as covariâncias entre os dados de cada apertada devem ser consideradas.

Simulação dos Dados Experimentais Considerando a Covariância

Para observar de forma explícita a existência de covariâncias nos dados, foi realizada uma simulação do experimento utilizando o Matlab versão 2010. Para cada voluntário pegou-se o conjunto de apertadas da força treinada e estimou-se o valor verdadeiro da força 1. Este parâmetro foi obtido por meio da média das médias de cada apertada da força 1. Estimou-se o erro sistemático de cada apertada calculando a distância desta média ao valor verdadeiro estimado. Obteve-se também, o desvio padrão de cada apertada para estimar o erro aleatório de cada dado de saída do sensor. Pode-se ver de forma esquemática os parâmetros que foram estimados para a simulação do experimento na Figura 5 abaixo.

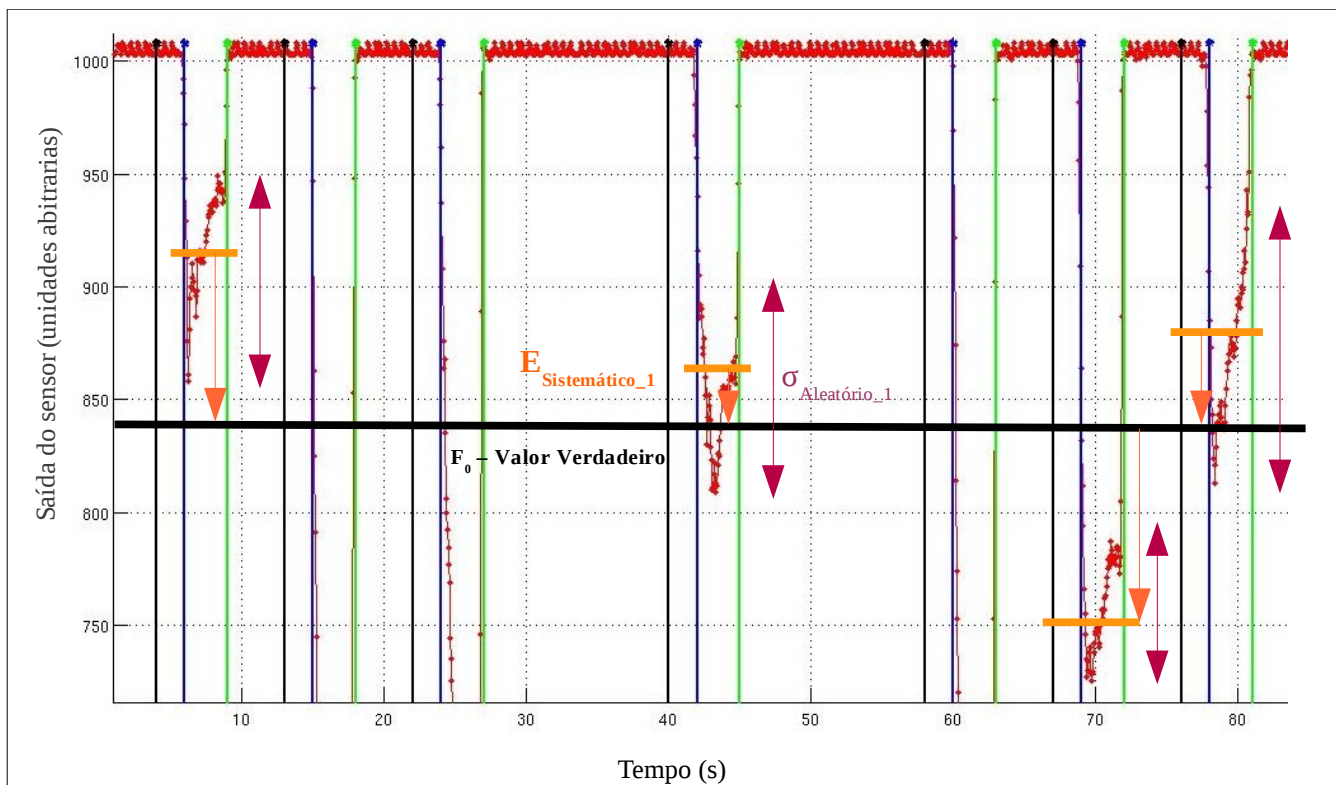


Figura 5: Conjunto de apertadas da força treinada do voluntário C1034. A linha preta horizontal trata-se do valor verdadeiro da força 1 estimado pela média das 9 médias de cada apertada, cada tarefa possuía em média 20 dados de saída do sensor. Em laranja representou-se o erro sistemático de cada atividade de pressionamento do sensor, que trata-se da distância da média de cada apertada em relação ao valor verdadeiro da força 1 estimado. Em roxo, temos a representação do desvio padrão de cada atividade responsável pela estimativa do erro aleatório de cada dado de saída do sensor. As linhas verticais preta, azul e verde estão expostas para mostrar o início da instrução da atividade e os limites de cada pressionamento do sensor respectivamente.

Acima, pode-se observar os parâmetros que foram estimados para cada apertada da força 1 do voluntário C1034. Primeiramente precisava-se estimar o valor verdadeiro da força 1 para cada um dos 6 voluntários, tal parâmetro foi obtido por meio da média das médias de cada pressionamento do sensor. Os dados de força, $F_{exp}(t)$, em unidades arbitrárias que seriam gerados pela simulação seriam descritos pela relação,

$$F_{exp}(t) = F_0 + \text{Erro}_{\text{aleatorio}} + \text{Erro}_{\text{sistemático_apertada}}$$

onde o erro aleatório e o erro sistemático de cada dado seria estimado da seguinte forma usando a plataforma Matlab v.2010,

$$\text{Erro}_{\text{aleatorio}} = \sigma_{\text{aleatório}} * \text{randn.}$$

$$\text{Erro}_{\text{sistemático_apertada}} = \sigma_{\text{sist}} * \text{randn.}$$

Para que fosse possível estimar o erro aleatório e sistemático com base nos dados experimentais coletados foi calculado o desvio padrão referente aos erros aleatórios e o desvio padrão referente aos erros sistemáticos da seguinte forma,

$\sigma_{\text{aleatório}} = \sigma_{\text{durante_apertada}} = [(\sigma_{\text{Ap}1}^2 + \sigma_{\text{Ap}2}^2 + \dots + \sigma_{\text{Ap}9}^2)/9]^{1/2}$, onde $\sigma_{\text{A}pi}$ representa o desvio padrão calculado para o conjunto de dados da i-ésima apertada da força treinada.

$(\sigma_{\text{das_Médias}})^2 = (\sigma_{\text{aleatório}})^2/(N) + \sigma_{\text{sist}}^2$, onde N é o número de dados em uma única apertada, aproximadamente 20, e $\sigma_{\text{das_Médias}}$ é o desvio padrão das 9 médias de cada apertada.

$$\sigma_{\text{sist}} = [(\sigma_{\text{das_Médias}})^2 - (\sigma_{\text{aleatório}})^2/(N)]^{1/2}.$$

Deve-se salientar que o erro sistemático é o mesmo dentro de uma única apertada, e que varia entre as apertadas, porém, o erro aleatório é diferente a cada saída do sensor.

Esta simulação foi feita não apenas para a força treinada como descrito mas para as restantes de forma similar. Abaixo tem-se o código feito em Matlab para o voluntário C1034 para ajudar na visualização do processo.

```
x0_1 = 955.7;
x0_2 = 922.5;
x0_3 = 870.2;
```

Dados estimados da força verdadeira requerida, os índices 1, 2 e 3 são referentes a força 1, 2 e 3 respectivamente.

```
sigma0_1 = 10.9;
sigma0_2 = 8.1;
sigma0_3 = 13.8;
```

Dados estimados do desvio padrão referente ao erro aleatório, os índices 1, 2 e 3 são referentes a força 1, 2 e 3 respectivamente.

```
N = 9;
M = 20;
```

N, número de apertadas da força 1, 2 e 3. Cada força foi realizada 9 vezes durante o experimento e portanto na simulação. M, número de dados, saídas do sensor, em cada apertada.

```
sigma_s_1 = 23.5;
sigma_s_2 = 19.1;
sigma_s_3 = 33.9;
```

Dados estimados do desvio padrão referente ao erro sistemático, os índices 1, 2 e 3 são referentes a força 1, 2 e 3 respectivamente.

```
X1 = zeros(9,M);
X2 = zeros(9,M);
X3 = zeros(9,M);
```

Matrizes 9 x 20. A linha refere-se ao número da apertada. A coluna refere-se a quantidade de dados gerados para cada apertada do sensor. Os índices da variável X referem-se a força 1, 2 e 3 respectivamente.

```
for i=1:N
```

```
erroSistApertada_1 = sigma_s_1*randn;
erroSistApertada_2 = sigma_s_2*randn;
erroSistApertada_3 = sigma_s_3*randn;
```

Dados estimados do erro sistemático para a apertada "i", os índices 1, 2 e 3 são referentes a força 1, 2 e 3 respectivamente.

20 dados estimados para a i-ésima apertada cada dado gerado possui um erro aleatório distinto, porém, o erro sistemático será o mesmo para a i-ésima apertada os índices 1, 2 e 3 são referentes a força 1, 2 e 3 respectivamente.

```
for j=1:M
```

```

X1(i,j) = x0_1 + sigma0_1*randn + erroSistApertada_1;
X2(i,j) = x0_2 + sigma0_2*randn + erroSistApertada_2;
X3(i,j) = x0_3 + sigma0_3*randn + erroSistApertada_3;
```


end
end

Em seguida, foram plotados os dados que representam a saída do sensor em função da ordem de aparição dos dados, Figura 6. Somente foram expressos aqui os dados do voluntário C1034, porém o mesmo procedimento foi realizado para os 6 voluntários analisados, que poderá ser visto na Tabela 2 em seguida.

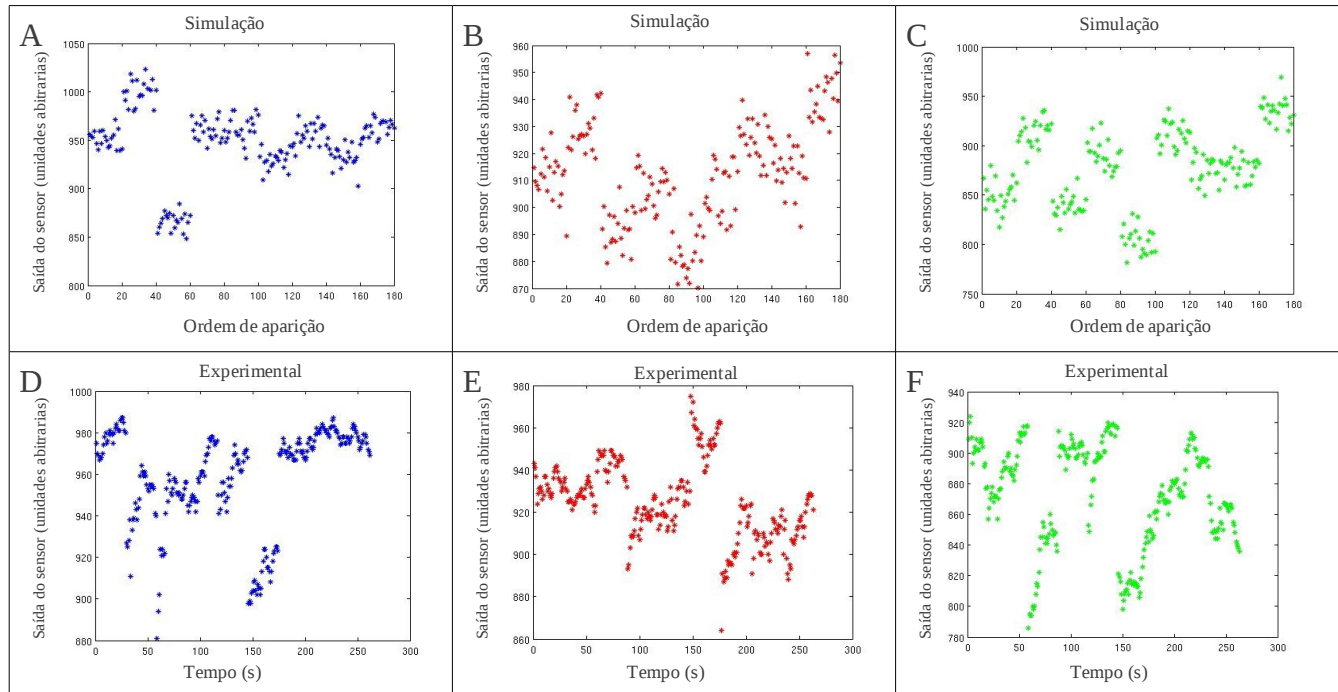


Figura 6: Simulação realizada para expressar os dados de força, saída do sensor, em função da ordem de aparição dos dados do voluntário C1034, itens A, B e C. Em A são expressos os conjuntos de força 1, em B os conjuntos de força 2 e em C os conjuntos de força 3. Todas as simulações consideraram a existência de erros sistemáticos. Abaixo, itens D, E e F estão expressos os valores obtidos experimentalmente da saída do sensor em função do tempo de duração do experimento. É possível observar um comportamento similar entre os dados simulados e os dados experimentais.

Pode-se observar que o comportamento dos dados da Simulação, mostrados na Figura 6 - A, B e C é similar ao comportamento visto dos dados experimentais, D, E e F. Os dados simulados não estão em escala de tempo e sim em ordem de aparição, mas, para os fins comparativos deste projeto, tal fato não acarreta viés que possa comprometer a interpretação dos dados.

Com isso, foi feita a Tabela 2 abaixo, onde consta todos os dados de média das forças para cada voluntário e suas respectivas incertezas estimadas utilizando as duas abordagens, as quais, também foram aplicadas aos dados experimentais. É claramente visível a discrepância entre as ordens de grandeza das incertezas ao ser comparado os dois métodos, este comportamento é similar aos dados experimentais.

Tabela 2: Média das forças treinada (1), dobro (2) e triplo (3) e suas respectivas incertezas considerando independência e covariância dos dados simulados com erro sistemático.

Média da Força 1 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 1 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
962.4	1.1	962.4	4.1
873.3	2.9	873.3	12.4
972.6	0.4	972.6	1.6
792.2	5.1	792.2	21.4
947.1	2.7	947.1	12.1
Média da Força 2 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 2 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
968.2	2.7	968.2	12.1
724.4	4.4	724.4	20.1
947.4	1.4	947.4	6.4
711.3	5.8	711.3	26.6
912.3	1.4	912.3	6.1
Média da Força 3 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 3 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
870.5	3.2	870.5	14.6
625.5	3.3	625.5	14.5
936.6	1.6	936.6	6.7
693.8	4.6	693.8	19.7
877.7	3.1	877.7	13.8

Como visto na Tabela 2, os dados simulados com erros sistemáticos possuem diferentes valores de incerteza ao serem confrontadas ambas as abordagens estatísticas. Isto, porque os dados são covariantes dentro de uma apertada e, a cada apertada esta covariância se expressa distintamente. Constatou-se que os dados simulados com erros sistemáticos possuem um comportamento semelhante aos dados experimentais inicialmente analisados, o que mostra a tendência dos dados experimentais em ter erros sistemáticos e covariância entre os dados de força. Contudo, para confrontar-mos de fato tal afirmativa vamos simular os dados sem erros sistemáticos, ou seja, sem covariância, e observar o que ocorre ao adotar-mos ambas as abordagens estatísticas.

Simulação dos Dados Experimentais Considerando os Dados Independentes

Nesta etapa, foram refeitas as simulações para cada voluntário, porém, foram retiradas da

simulação a contribuição do erro sistemático. Desta forma, os dados gerados possuíam somente erros de origem aleatória. Abaixo, está expresso o código da simulação feita para o mesmo voluntário que utilizou-se de exemplo desde o início deste estudo, C1034, sem erros sistemáticos.

```

x0_1 = 955.7;
x0_2 = 922.5;
x0_3 = 870.2;
    }
    Dados estimados da força verdadeira requerida, os índices
    1, 2 e 3 são referentes a força 1, 2 e 3 respectivamente.

sigma0_1 = 10.9;
sigma0_2 = 8.1;
sigma0_3 = 13.8;
    }
    Dados estimados do desvio padrão referente ao erro
    aleatório, os índices 1, 2 e 3 são referentes a força 1, 2 e 3
    respectivamente.

N = 9;
M = 20;
    }
    N, número de apertadas da força 1, 2 e 3. Cada força foi realizada 9 vezes
    durante o experimento e portanto na simulação. M, número de dados, saídas
    do sensor, em cada apertada.

X1 = zeros(9,M);
X2 = zeros(9,M);
X3 = zeros(9,M);
    }
    Matrizes 9 x 20. A linha refere-se ao numero da apertada.
    A coluna refere-se a quantidade de dados gerados para
    cada apertada do sensor. Os índices da variável X referem-
    se a força 1, 2 e 3 respectivamente.

for i=1:N

    20 dados estimados
    para a i-ésima
    apertada cada dado
    gerado possui um
    erro aleatório
    distinto. Os índices
    1, 2 e 3 são referentes
    a força 1, 2 e 3
    respectivamente.
    }
    for j=1:M
        X1(i,j) = x0_1 + sigma0_1*randn;
        X2(i,j) = x0_2 + sigma0_2*randn;
        X3(i,j) = x0_3 + sigma0_3*randn;
    end
end
end

```

Os dados obtidos por meio desta simulação para o voluntário C1034 pode ser analisado na Figura 7 abaixo. Pode-se observar que os dados de saída do sensor em função da ordem de aparição não dividem-se mais em 9 grupos bem distintos, não sendo possível distingui-los entre si. Isto, acontece tanto para a força treinada (1), quanto para seu dobro (2) e triplo (3) respectivamente.

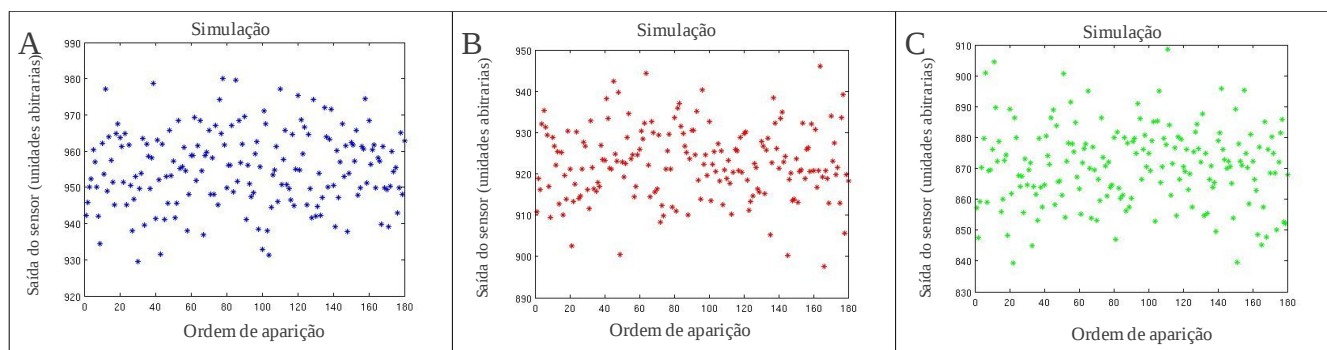


Figura 7: Dados simulados da saída do sensor em função da ordem de aparição do voluntário C1034 sem erros sistemáticos. Em A estão expressos os dados obtidos da força 1, em B da força 2 e em C da força 3 para todo o experimento. Não é possível distinguir os 9 conjuntos de apertadas tanto em A quanto em B e C.

Em seguida, a Tabela 3 mostra os valores das médias das forças simuladas e suas respectivas incertezas para cada voluntário simulado referente as 3 forças. Pode-se observar que os dados de incerteza em ambas as abordagens possuem a mesma ordem de grandeza.

Tabela 3: Média das forças treinada (1), dobro (2) e triplo (3) e suas respectivas incertezas considerando independência e covariância dos dados simulados sem erro sistemático.

Média da Força 1 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 1 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
967.2	0.6	967.2	0.7
863.7	1.4	863.7	1.5
971.5	0.3	971.5	0.2
801.7	2.5	801.7	2.5
955.2	0.8	955.2	0.7
Média da Força 2 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 2 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
956.9	0.8	956.9	0.7
724.8	1.2	724.8	1.3
960.6	0.4	960.6	0.3
701.2	1.6	701.2	1.7
922.6	0.6	922.6	0.7

Média da Força 3 (Independente) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Independente)	Média da Força 3 (Covariante) (Unidades Arbitrárias)	Desvio Padrão da Média (Covariante)
897.0	1.0	897.0	0.7
603.4	1.2	603.4	1.2
937.9	0.7	937.9	0.7
696.5	1.9	696.5	2.1
870.8	0.9	870.8	1.3

Discussão e Conclusão

Pode-se observar que a simulação com erros sistemáticos representou mais fielmente o comportamento dos dados experimentais.

Ao serem adotadas duas abordagens distintas, uma considerando os dados de uma mesma força independentes durante todo experimento, e outra que considerava cada apertada um conjunto com erros sistemáticos distintos, as médias permaneciam as mesmas, porém as incertezas assumiam valores distintos possuindo ordens de grandeza de diferença. Portanto, possivelmente os dados experimentais possuíam erros sistemáticos que deveriam ser considerados na análise.

A simulação também nos mostra que ao retirar-mos os erros sistemáticos, os valores das incertezas em ambas as abordagens são bem próximos entre si, sem ser possível a distinção entre os métodos. Esta constatação, corrobora a hipótese que os dados experimentais analisados possuíam covariâncias entre si.

Ao considerar-mos os dados experimentais independentes, chegamos em incertezas muito pequenas devido a quantidade de dados, tal fato não expressa o fenômeno de reprodução de força realizada por voluntários humanos, o que corrobora para assumirmos a existência de erros sistemáticos nos dados experimentais.

Bibliografia

[1]Um guia simplificado com os passos para a avaliação de incertezas de medições de acordo com o GUM (em inglês): http://www.bipm.org/utis/common/documents/jcgm/JCGM_104_2009_E.pdf

[2]Guia para expressão da incerteza de medições (GUM). Edição Brasileira disponível no site do INMETRO em http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/gum_final.pdf

[3]BIPM-GUM site do Bureau International des Poids et Mesures com material relacionado ao Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (em inglês) <http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html>

[4]Fundamentos da Teoria de Erros - 2ª Edição - Vuolo, José Henrique.