1. TÓPICO 2

1.1. **Convergência quase certa e em probabilidade. Propriedades.**

Definição 1.1. Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e X uma variável aleatória definida em Ω com valores em $\Re$, isto é, para cada $w \in \Omega$, $X(w) \in \Re$, é um número real.

Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias. Para cada realização w , $(X_n(w))_{n\geq 1}$ é uma sequência de números reais que pode (ou não) convergir para um valor real $X(w)$.

Seja
$$N^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to X(w)\}.$$

Se $P(N^c) = 1$ dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X. Denotamos $X_n \to^{qc} X$.

Observe que $P(N) = 1 - P(N^c) = 0$ e também dizemos que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge quase certamente para X a menos de um conjunto de medida nula.

Observação 1.2. O limite é único. Suponha que exista uma outra variável aleatória Y, tal que $X_n \to^{qc} Y$, isto é, existe M^c com $P(M^c) = 1$
$$M^c = \{w \in \Omega \ \mid \ X_n(w) \to Y(w)\}.$$
Mas $P(N^c \cap M^c) = 1$ e em $N^c \cap M^c$ temos $X(w) = Y(w)$.

Exemplo 1.3. Seja X uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $(0, 1)$, $X \sim U(0, 1)$.

Defina
$$X_n = \sum_{k=1}^{n} (1 - X)^{k-1}.$$

Para cada $w, 0 < X(w) < 1$, temos
$$\lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - X(w))^{k-1} = \frac{1}{X(w)}$$
com
$$P(\lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = \frac{1}{X(w)}) = P(0 < X < 1) = 1$$
e $X_n \to^{qc} \frac{1}{X}$.

Defina
$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{5.X}{3})^k.$$

Para cada $w, 0 < X(w) < 1$, temos

$$\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(w) = \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{5.X(w)}{3})^k = \frac{1}{1-\frac{5.X(w)}{3}},$$

se $\frac{5.X(w)}{3} < 1$, isto é, $X(w) < \frac{3}{5}$. Então

$$P(\lim_{n\uparrow\infty} Y_n(w) = Y(w) = \frac{1}{1-\frac{5.X(w)}{3}}) = P(X < \frac{3}{5}) = \frac{3}{5}$$

e $Y_n \nrightarrow^{qc} Y$.

Observação 1.4. Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de números reais. Uma condição equivalente para que $\lim_{n\uparrow\infty} a_n = a$ é

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \aleph \quad | \quad \forall k, k \geq n, \quad |a_k - a| < \varepsilon,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\forall m \in \aleph, \exists n \in \aleph \quad | \quad \forall k, k \geq n, \quad |a_k - a| < \frac{1}{m}.$$

Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow^{qc} X$. Então

$$N^c = \{w \quad | \quad \lim_{n\uparrow\infty} X_n(w) = X(w)\} =$$

$$\{w \quad | \quad \forall m \in \aleph, \exists n \in \aleph \quad | \quad \forall k, k \geq n, \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\} =$$

$$\bigcap_{m\geq 1}\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}.$$

Portanto $P(N^c) = 1$ se, e somente se,

$$P(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n}\{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

que é equivalente a

$$P(\liminf\{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| < \frac{1}{m}\}) = 1, \quad \forall m \geq 1$$

ou

$$P(\limsup\{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Corolário 1.5. *Sejam X uma variável aleatória e $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, e os eventos*

$$A_k = \{w \quad | \quad |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}.$$

Se $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty, \quad \forall m \geq 1$, então $X_n \rightarrow^{qc} X$.

Prova: *Segue do Lema de Borel Cantelli.*

Exemplo 1.6. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d) com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \frac{1}{m}) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \frac{1}{m}) = P(X_n > (\ln n)^{\frac{1}{m}}) = e^{-(\ln n)^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}}.$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{m}}} = \infty$ se $m \geq 1$.

Concluimos, pelo lema de Borel Cantelli, que $P(\limsup |Y_n - 0| > \frac{1}{m}) = 1$ and $Y_n \nrightarrow^{qc} 0$.

Exemplo 1.7. Considere o espaço $((0,1)), \Im, P)$ onde P é uniforme no intervalo $(0,1)$.

Defina a variável aleatória

$$X_n(w) = 2^n \quad se \quad w \in (0, \frac{1}{n}) \quad e \quad 0 \quad c.c.$$

Observe que,
$P(\lim_{n\to\infty} X_n(w) = 0) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}, 1)) = 1$ e $X_n \to^{qc} 0$.
Contudo

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

mas as variáveis X_n não são independentes pois $X_n = 2^n \to X_{n-1} = 2^{n-1}$ e o Lema de Borel Cantelli não vale.

Operações com limites

P.1 - Se $X_n \to^{qc} X$ e f é uma função real contínua, então

$$f(X_n) \to^{qc} f(X).$$

Prova:

pois

$$N^c = \{w \in \Omega \mid X_n(w) \to X(w)\} = \{w \in \Omega \mid f(X_n(w)) \to f(X(w))\}$$

e $P(N^c) = 1$.

P.2 - Se $X_n \to^{qc} X$ e $Y_n \to^{qc} Y$, Então

$$X_n \pm Y_n \to^{qc} X \pm Y;$$
$$X_n.Y_n \to^{qc} X.Y;$$
$$\frac{X_n}{Y_n} \to^{qc} \frac{X}{Y}, \quad quando \ \ bem \ \ definida.$$

Prova:

Sejam

$$N_X^c = \{w \in \Omega \ | \ X_n(w) \to X(w)\} \ \ e \ \ N_Y^c = \{w \in \Omega \ | \ Y_n(w) \to Y(w)\}$$

, com $P(N_X^c) = 1$, $P(N_Y^c) = 1$, o que é equivalente a $P(N_X^c \bigcap N_Y^c)) = 1$.

Se $w \in N_X^c \bigcap N_Y^c)$, temos:

$$(X_n \pm Y_n)(w) \to^{qc} (X \pm Y)(w);$$

$$(X_n.Y_n)(w) \to^{qc} (X.Y)(w);$$

$$(\frac{X_n}{Y_n})(w) \to^{qc} (\frac{X}{Y})(w), \ \ quando \ \ bem \ \ definida.$$

Convergência em probabilidade

Definição 1.8. Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória definidas em um mesmo espaço de probabilidade. Considere a sequência de números $(P(|X_n - X| > \varepsilon))_{n\geq 1}$. Se $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, dizemos que X_n converge em probabilidade para X e denotamos por $X_n \to^P X$.

Observação 1.9. Observe que convergência em probabilidade não é concernente à convergência pontual de $X_n(w)$ para $X(w)$. A interpretação é que, para valores grandes de n, as variáveis aleatórias X_n e X são aproximadamente iguais com probabilidade bem alta.

Observação 1.10. O limite em probabilidade é único: Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X, Y variáveis aleatórias definidas em um mesmo espaço de probabilidade, tais que $X_n \to^P X$ e $X_n \to^P Y$. Observe que

$$|X - Y| = |X - X_n + X_n - Y| \leq |X_n - X| + ||X_n - Y|$$

e portanto

$$\{|X - Y| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \{|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Temos que

$$P(|X - Y| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - X| > \frac{\varepsilon}{2})$$

Então $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X - Y| > \varepsilon) = \lim_{n\uparrow\infty} P(|X - Y| > \varepsilon) \leq$$

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + \lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$

Portanto $\forall \varepsilon > 0$ temos $P(|X - Y| > \varepsilon) = 0$ e $P(X = Y) = 1$.

Exemplo 1.11. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas (i.i.d) com distribuição exponencial padrão. Defina as variáveis aleatórias $Y_n = \frac{X_n}{\ln n}$ de maneira que

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(|\frac{X_n}{\ln n}| > \varepsilon) = P(X_n > (\ln n)^{\varepsilon}) = e^{-(\ln n)^{\varepsilon}} = \frac{1}{n^{\varepsilon}}.$$

Portanto $\lim_{n\uparrow\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$ e $Y_n \to^P 0$.

Contudo

$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon}} = \infty$ se $\varepsilon \leq 1$.

Como o Y_n são independentes concluimos que pelo Lema de Borel Cantelli que

$$P(\limsup\{|Y_n| > \varepsilon\}) = 1$$

e $Y_n \to^P 0$ mas $Y_n \nrightarrow^{qc} 0$.

Teorema 1.12. *Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória tal que $X_n \to^{qc} X$. Então $X_n \to^P X$.*

Prova:

Se $X_n \to^{qc} X$, então

$$P(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n}\{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1 \leftrightarrow$$

$$P(\lim_{n\uparrow\infty}\bigcup_{k\geq n}\{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1 \leftrightarrow$$

$$\lim_{n\uparrow\infty} P(\bigcup_{k\geq n}\{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}) = 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Como

$$0 \leq P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) \leq P(\bigcup_{k\geq n}\{w \mid |X_k(w) - X(w)| > \frac{1}{m}\}), \quad \forall m \geq 1$$

temos $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| > \frac{1}{m}) = 0 \forall m \geq 1$ *e* $X_n \to^P X$.

No exemplo 1.11 observamos que a condição suficiente do teorema não vale. Pode-se provar que se $X_n \to^P X$, existe uma subsequência de $(X_n)_{n\geq 1}$, digamos $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ tal que $X_{n_k} \to^{qc} X$. Para provar tal fato usaremos o seguinte lema:

Lema 1.13. *Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias e X uma variável aleatória. Se $P(|X_n - X| \geq \varepsilon_n) \leq \delta_n$ para alguma sequência não negativa $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ com $\lim_{n\uparrow\infty} \varepsilon_n = 0$ e alguma sequência $(\delta_n)_{n\geq 1}$, com $\Sigma_{n=1}^{\infty}\delta_n < \infty$, então, $X_n \to^{qc} X$.*

Prova:

Por hipótese temos

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon_n) \leq \Sigma_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$$

e pelo Lema de Borel Cantelli concluimos que $P(|X_n - X| \geq \varepsilon_n, \ \ iv) = 0$. *Seja* $N = \{|X_n - X| \geq \varepsilon_n, \ \ iv\}$, *então* $P(N) = 0$.

Se $w \in N^c, \ \ \exists n(w) \in \aleph, \ \ | \ \ \forall n \geq n(w), |X_n - X| \leq \varepsilon_n$. *Como* $P(N^c) = 1$ *e* $\lim_{n\uparrow\infty} \varepsilon_n = 0$, *temos* $X_n \rightarrow^{qc} X$.

Teorema 1.14. *Sejam* $(X_n)_{n\geq 1}$, *uma sequência de variáveis aleatórias e* X *uma variável aleatória tal que* $X_n \rightarrow^{P} X$. *Então existe uma subsequência de* $(X_n)_{n\geq 1}$, *digamos* $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ *tal que* $X_{n_k} \rightarrow^{qc} X$.

Prova:

Por hipótese $\lim_{n\uparrow\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \ \ \forall \varepsilon > 0$. *Portanto*

$$\forall \frac{1}{2^k} > 0, \ \ \exists n_o(k), \ \ | \ \ se \ \ n \geq n(k) \rightarrow P(|X_n - X| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k},$$

em particular $P(|X_{n_k} - X| \geq \frac{1}{k}) < \frac{1}{2^k}$.

Assim, para provar o teorema tomamos $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, $\delta_k = \frac{1}{2^k}$ *e aplicarmos o lemma 1.13.*

Exemplo 1.15. Seja $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias com distribuição uniforme no intervalo $(0,1)$. Seja $Y_n = \min\{X_1, ..., X_n\}$. Então $Y_n \rightarrow^{P} 0$ pois

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(\min\{X_1, ..., X_n\} > \varepsilon) = P(X_1 > \varepsilon, ..., X_n > \varepsilon) =$$
$$\pi_{i=1}^{n} P(X_i > \varepsilon) = \pi_{i=1}^{n} (1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Operações com limites

P1 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$, uma sequência de variáveis aleatórias, X uma variável aleatória tal que $X_n \rightarrow^{P} X$ e g uma função real contínua. Então $g(X_n) \rightarrow^{P} g(X)$.

Prova:

Para a prova, usaremos o fato provado : Se X é uma variável aleatória, então, para todo $\varepsilon > 0$, existe k tal que $P(|X| > k) < \varepsilon$.

Se g é contínua, então

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ \ | \ \ se \ \ |x - y| < \delta(\varepsilon) \ \ \rightarrow \ \ |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Em um intervalo fechado, g é uniformemente contínua e δ não depende de ε. Portanto

$$\{|g(X_n) - g(X)| < \varepsilon\} \supset \{|X_n - X| < \delta\} \bigcap \{|X| \leq k\}\}$$

e

$$\{|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \delta\} \bigcap \{|X| > k\}\}$$

e

$$P(|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \delta) + P(|X| > k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

P2 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias, X e Y variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow^P X$ e $Y_n \rightarrow^P Y$. Então $X_n \pm Y_n \rightarrow^P X \pm Y$.

Prova:

Da desigualdade modular temos

$$|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| = |(X_n - X) \pm (Y_n - Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|$$

de forma que

$$\{|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \{|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}\}$$

e

$$P(|(X_n \pm Y_n) - (X \pm Y)| > \varepsilon) \leq P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}) + P(|Y_n - Y| > \frac{\varepsilon}{2}) \rightarrow o,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

P3 - Sejam $(X_n)_{n\geq 1}$ e $(Y_n)_{n\geq 1}$ sequências de variáveis aleatórias, X e Y variáveis aleatórias tais que $X_n \rightarrow^P X$ e $Y_n \rightarrow^P Y$. Então $X_n.Y_n \rightarrow^P X.Y$.

Prova:

A prova terá três partes:

A) Se a e b são constantes tais que $X_n \rightarrow^P a$ e $Y_n \rightarrow^P b$, então $X_n.Y_n \rightarrow^P a.b$, pois

$$\frac{X_n.Y_n = (X_n + Y_n)^2 - (X_n - Y_n)^2}{4} \rightarrow^P \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = a.b.$$

B) Se $X_n \rightarrow^P X$ e Y é uma variável aleatória, então $X_n.Y \rightarrow^P X.Y$.

Relembro o resultado do exercício 1.5 da aula 2: Seja Y uma variável aleatória, então

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists k > 0 \ \ | \ \ P(|Y| > k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto $P(|X_n.Y_n - X.Y| > \varepsilon) =$

$$P(\{|X_n.Y_n - X.Y| > \varepsilon\} \bigcap \{|Y| > k\}) + P(\{|X_n.Y_n - X.Y| > \varepsilon\} \bigcap \{|Y| \leq k\}) \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + P(\{|X_n - X|.|Y| > \varepsilon)\} \bigcap \{|Y| \leq k\}) \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + P(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{k}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para n grande.

C) Como $X_n - X \to^P 0$ $Y_n - Y \to^P 0$, temos pela parte A) que $(X_n - X).(Y_n - Y) \to^P 0$. Contudo $X_n.Y_n - x.Y_n - X_n.Y + X.Y = (X_n - X).(Y_n - Y) \to^P 0$, $X.Y_n \to^P X.Y$ e $X_n.Y \to^P X.Y$ temos o resultado que $X_n.Y_n \to^P X.Y$.

endproof

E-mail address: bueno@ime.usp.br

Departamento de Estatística, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66281, CEP 05311-970, São Paulo, Brazil