Física I- IME

2º Semestre de 2015

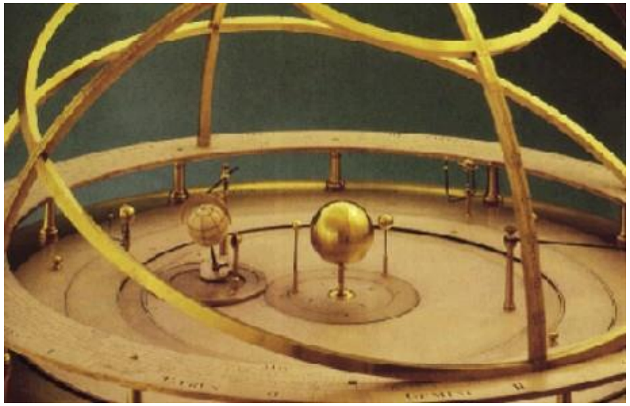
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: **Luiz carlos Nagamine**
E-mail: nagamine@if.usp.br
Fone: 3091.6877

Leis de Kepler

A humanidade sempre observou o céu e o utilizou como referência de orientação espacial. Porém, no ocidente, foi a partir do final da Idade Média que surgiram astrônomos que estudaram o céu de forma sistemática, a partir de observações minuciosas.

Nicolau Copérnico (heliocentrismo x geocentrismo) e as questões filosóficas e religiosas. Giordano Bruno, Galileu Galilei e a Inquisicão.

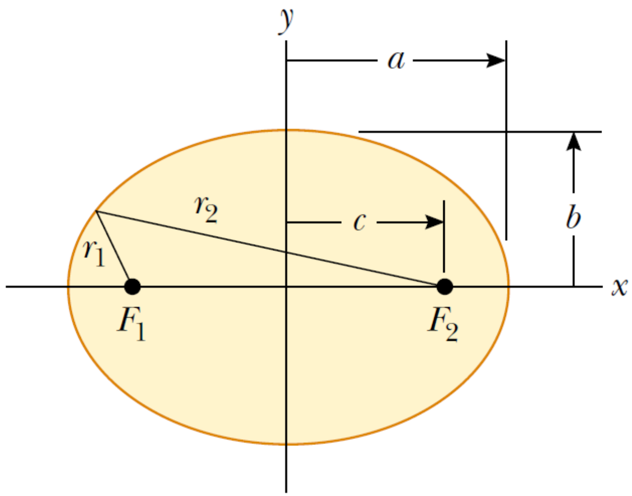


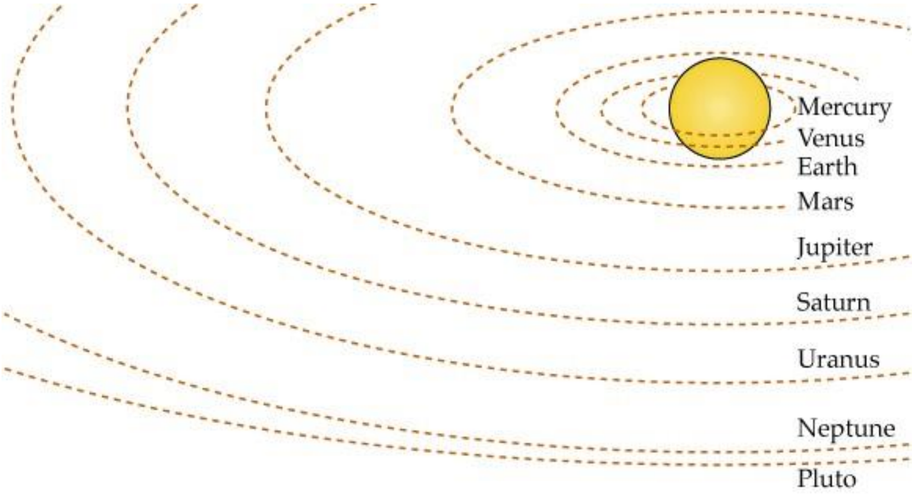
Ticho Brahe e Johannes Kepler, no século XVI, se constituem nos primeiros grandes exemplos de astrônomos observacionais.

Ticho Brahe fez grande quantidade de medições astronômicas e Kepler (discípulo) sistematizou os conhecimentos acumulados.

Primeira Lei de Kepler

Todos os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um de seus focos.





$$a^2 = b^2 + c^2$$

No sistema solar, o Sol está em um dos focos.

Uma elipse é o lugar geométrico dos pontos para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos, é constante. Os pontos fixos são chamados de focos.

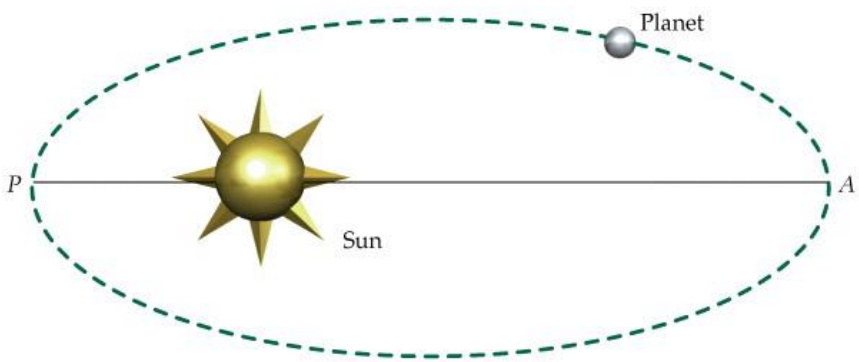
Para a Terra, a órbita é praticamente circular

Periélio: $1{,}48 \times 10^{11}$ m

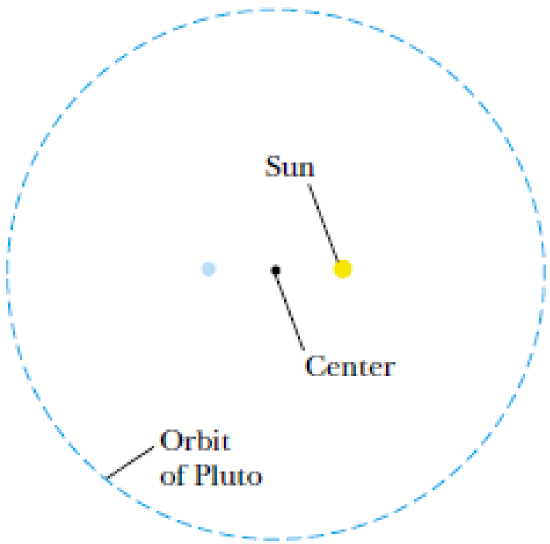
Afélio: $1{,}52 \times 10^{11}$ m

Unidade Astronômica (UA)

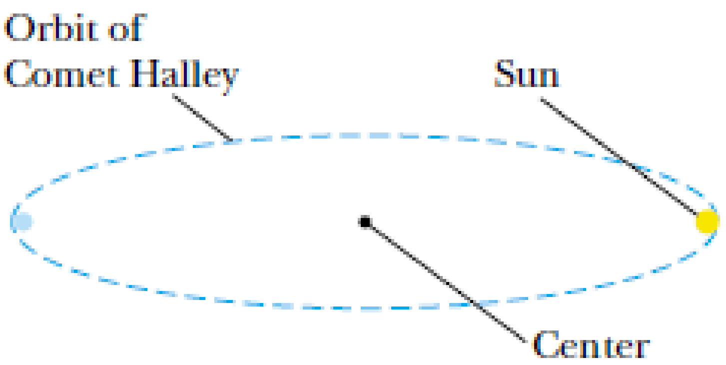
$$1UA = 1{,}50x10^{11} m$$



$$e = \frac{c}{a}$$



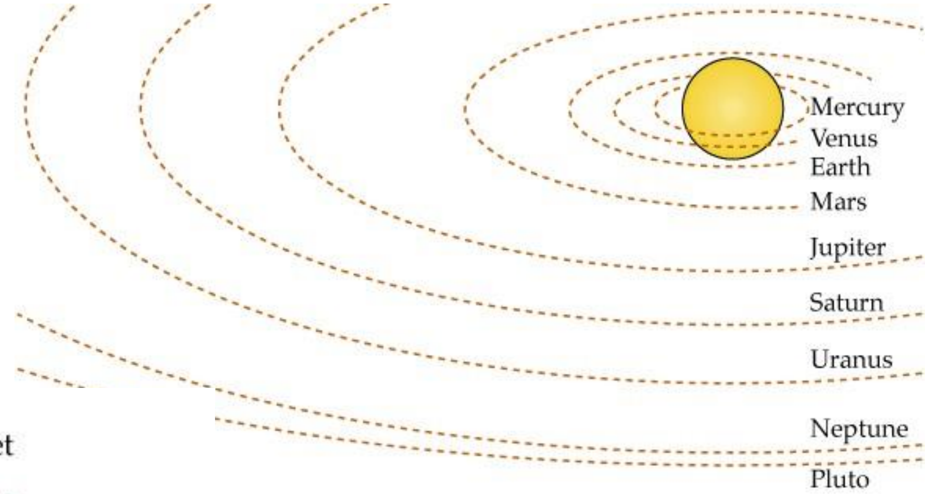
(a)



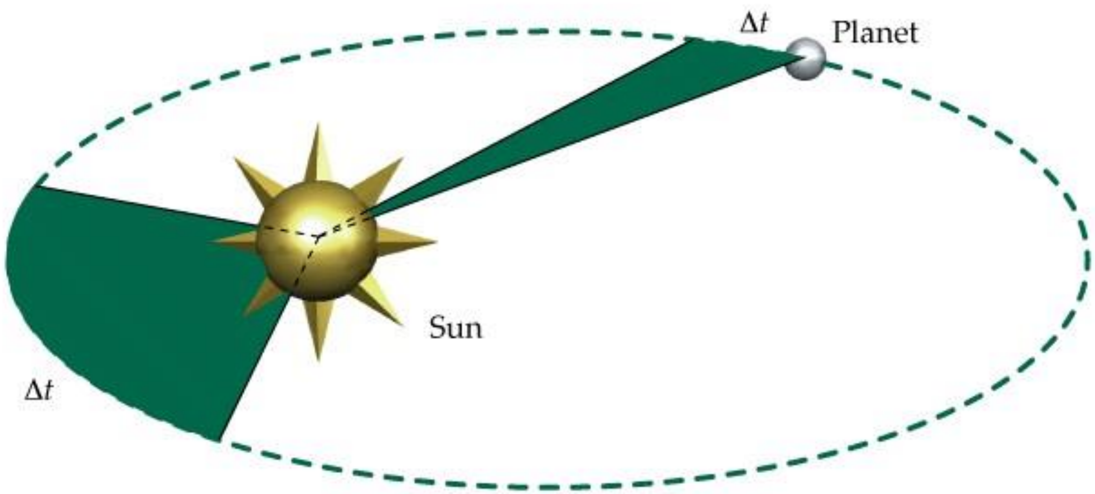
(b)

$$e = 0,25$$

Segunda Lei de Kepler



Uma linha ligando qualquer planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

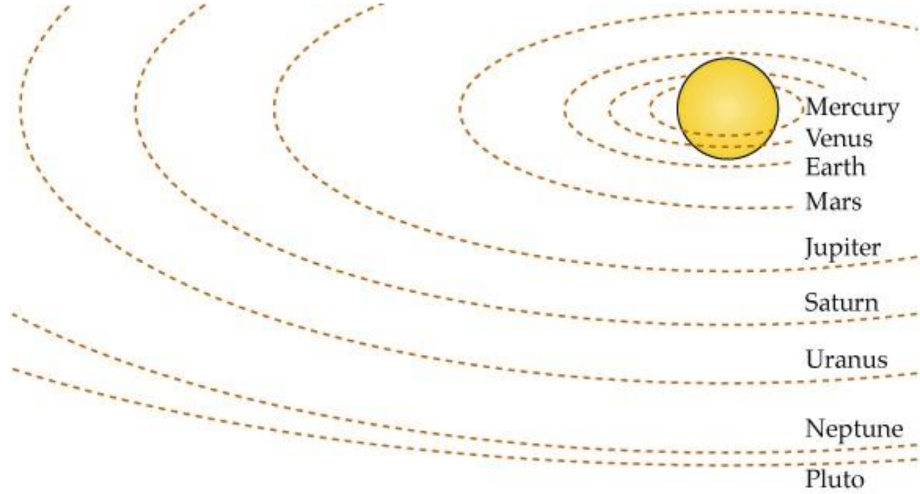


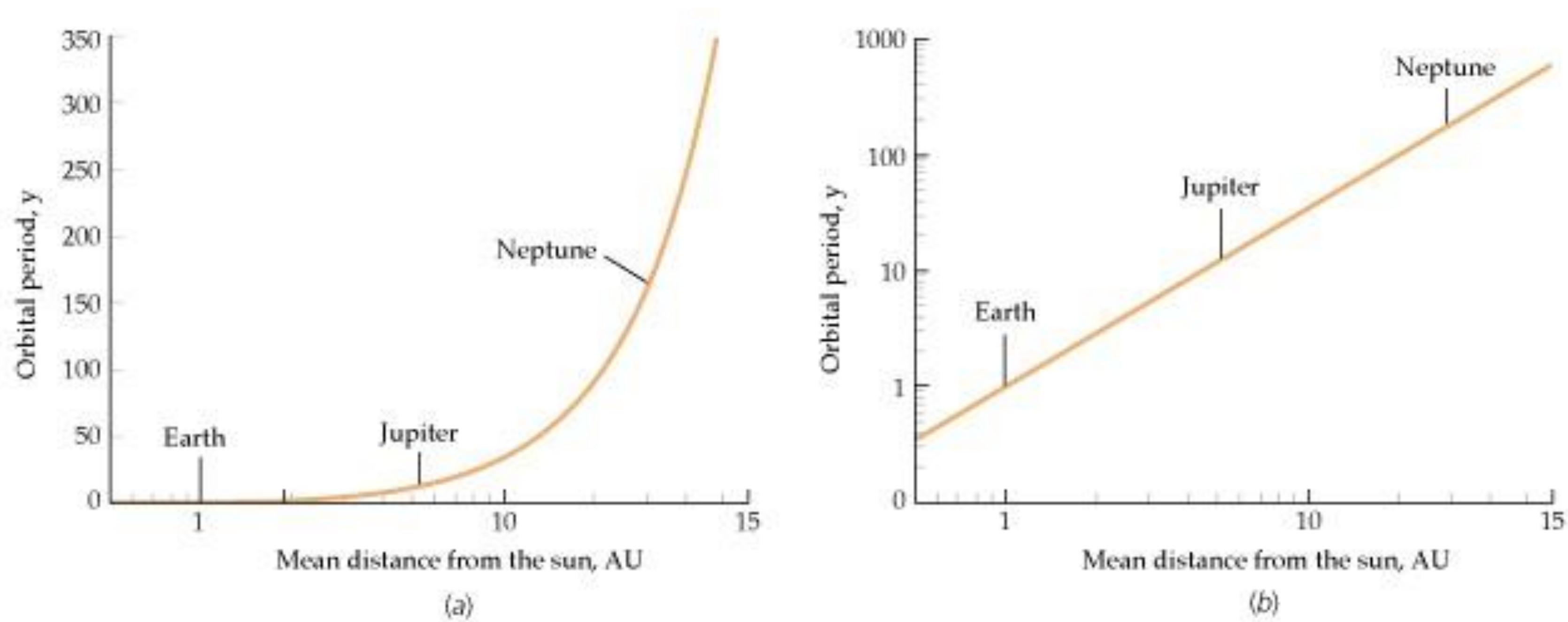
Esta lei é uma consequência da conservação da quantidade de movimento angular.

Terceira Lei de Kepler

O quadrado do período de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.

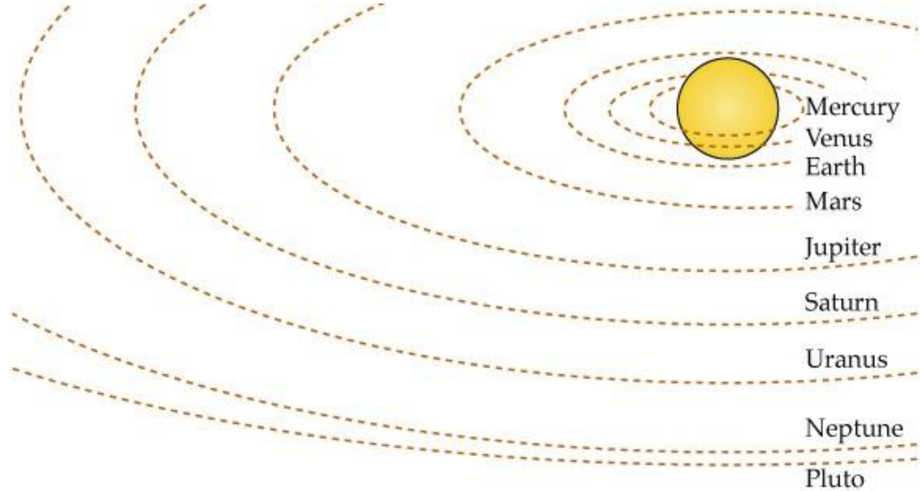
$$T^2 = Cr^3$$





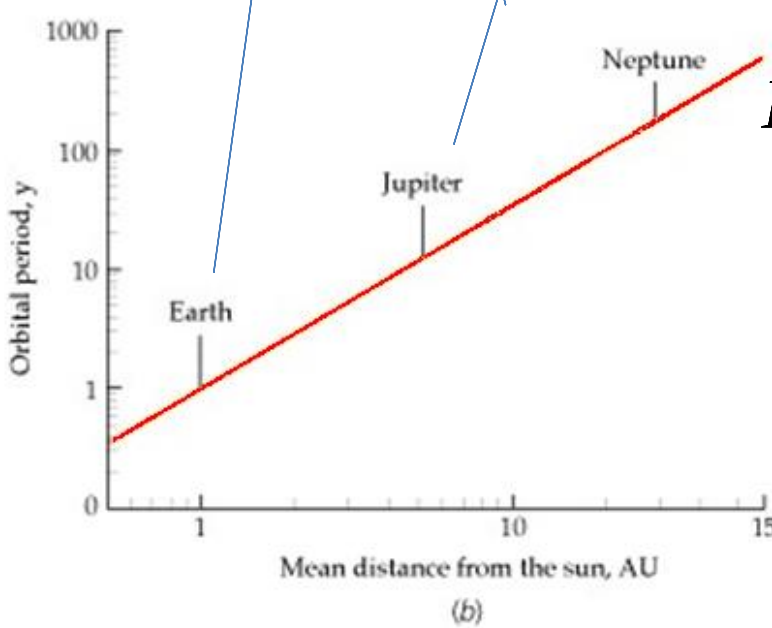
Exemplo

Sabendo-se que o raio orbital médio de Júpiter é de 5,2 UA, determine o período de sua órbita.



$$T_T^2 = Kr_T^3$$

$$T_J^2 = Kr_J^3$$



$$T_T^2 = Kr_T^3$$

$$K = 1\text{ano}^2/\text{UA}^3 = 2{,}97\times10^{-19}\,\text{s}^2/\text{m}^3$$

$$\frac{T_J^{\,2}}{T_T^{\,2}} = \frac{r_J^{\,3}}{r_T^{\,3}}$$

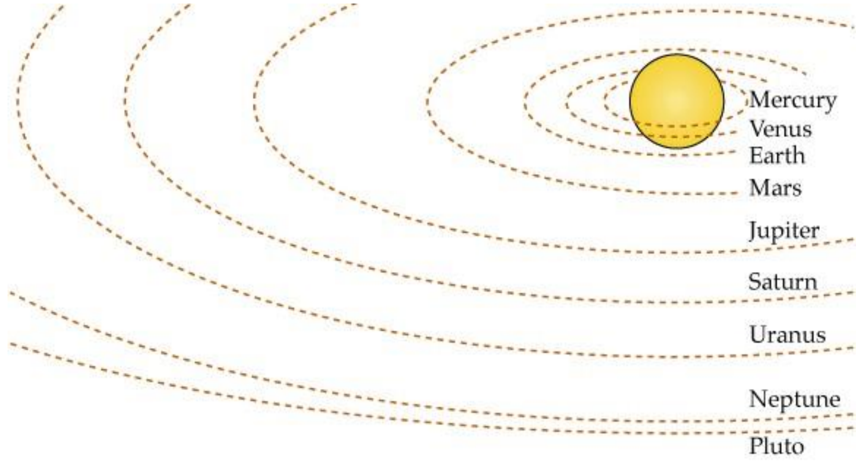
$$T_J = 11{,}9\text{anos}$$

Lei de Newton da Gravitação

As Leis de Kepler são resultados empíricos.

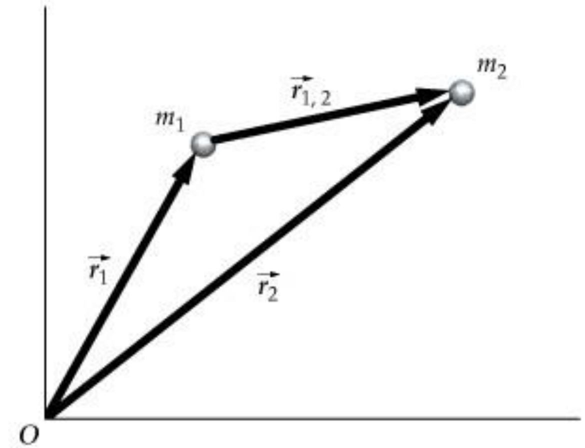
Newton demonstrou que órbitas elípticas podem ser explicadas por forças atrativas que variam com o inverso do quadrado da distância.

Ele também postulou que as leis obtidas na Terra eram universais.

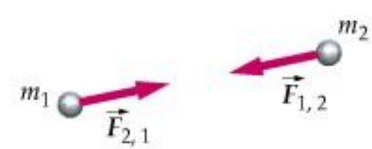


$$\vec{F}_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12}$$

Onde G= 6,67x10^{-11} N.m^2/kg^2 é a Constante de Gravitação Universal.

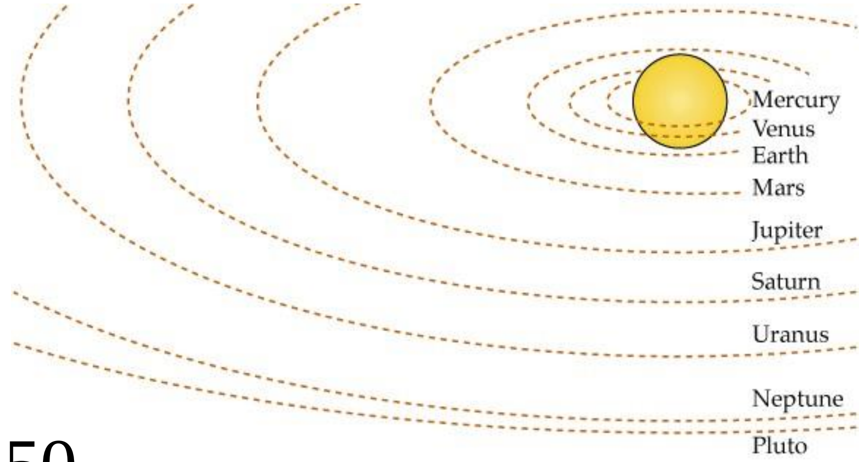


(a)



(b)

Lei de Newton da Gravitação



Qual é força gravitacional que uma pessoa de 65 kg exerce sobre outra de 50 kg?

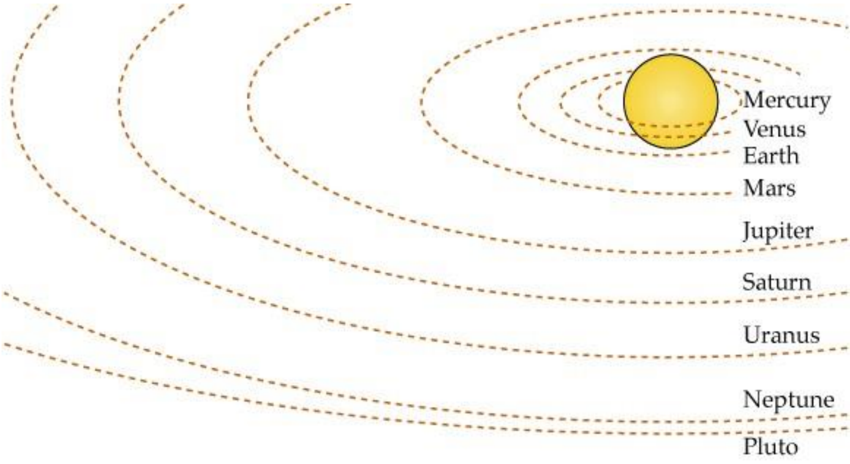
$$F_g = \frac{Gm_1 m_2}{r_{12}^2} = \frac{6,67\times 10^{-11}\cdot 65\cdot 50}{0,5^2}$$

$$F_g = 8,67\times 10^{-7}\ N$$

Esta força é em geral desprezível, exceto se envolve massas astrômicas.

Lei de Newton da Gravitação

Comparação entre a aceleração de uma partícula na superfície da Terra e a aceleração da Lua em seu movimento orbital.



$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} = ma$$

$$a = \frac{GM_T}{R_T^2} = g$$

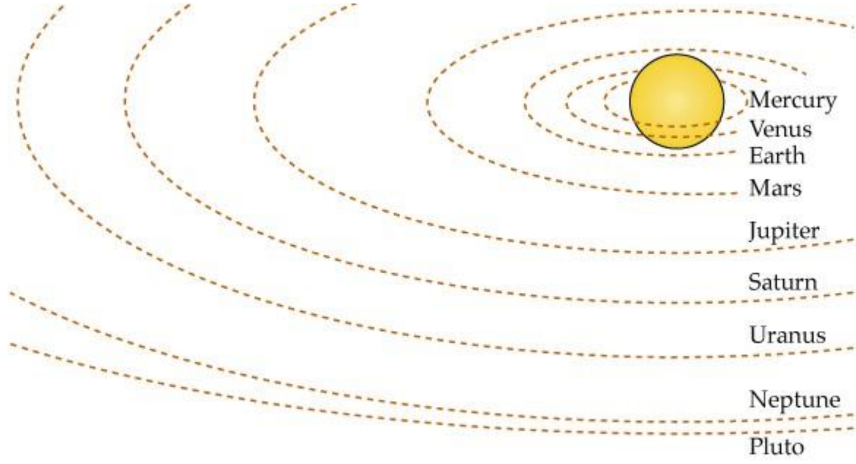
$$a_L = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 2,71 \times 10^{-3} m/s^2$$

Como a distância Terra-Lua é cerca de 60 vezes o raio da Terra,

$$a_L = \frac{GM_T}{3600 R_T^2} = \frac{g}{3600} = 2,72 \times 10^{-3} m/s^2$$

Newton fez uma boa estimativa do valor de G

Lei de Newton da Gravitação



Henry Cavendish mediu G pela primeira vez em 1798 e obteve 1% de precisão.

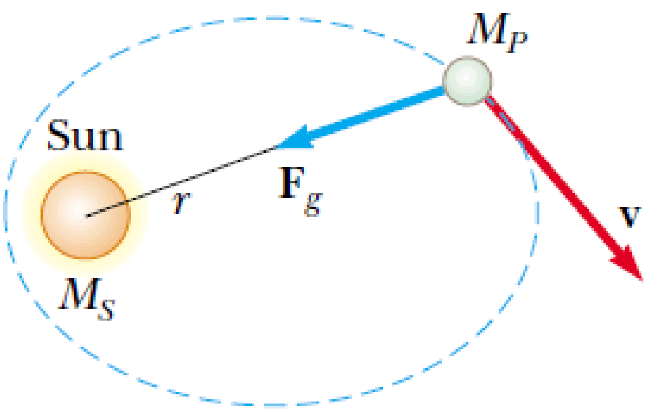
A precisão atual é de 1 parte em 10.000.

Dentre todas as constantes universais, G é a menos precisa!

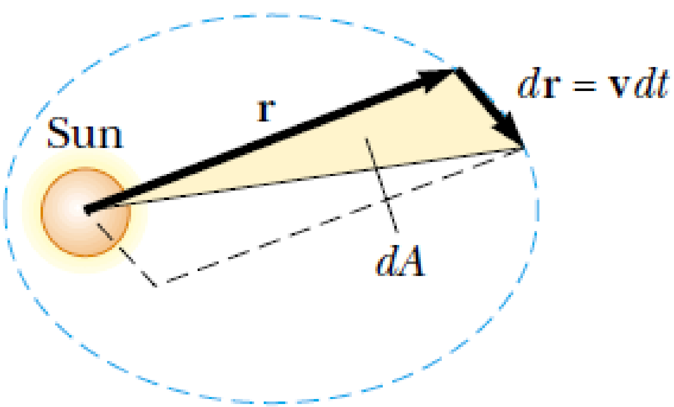
$$G = 6,67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$$

De volta as Leis de Kepler

Newton mostrou que quando temos forças centrais, como é o caso do sistema solar, as trajetórias possíveis para os corpos são: elípticas, parabólicas e hiperbólicas.



(a)

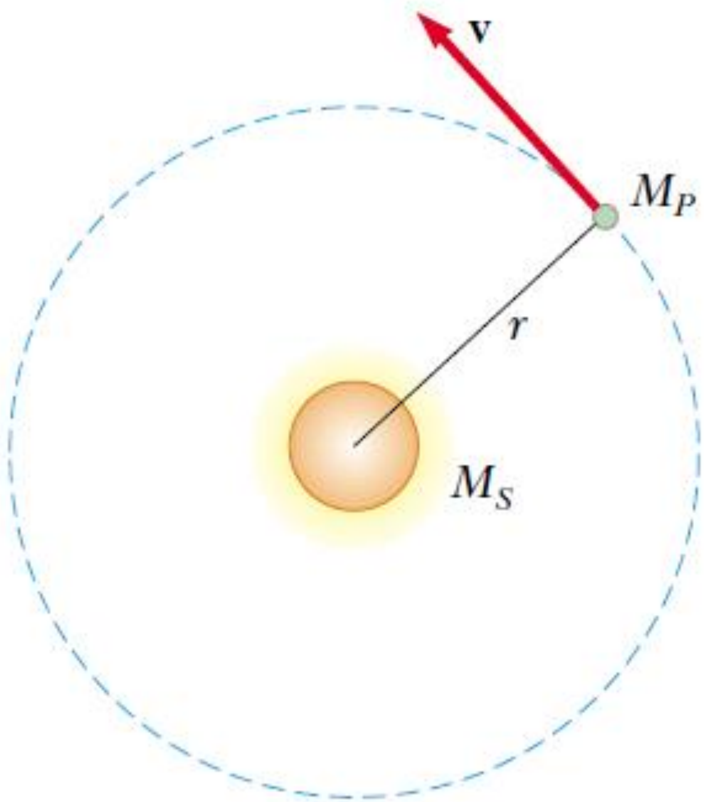


(b)

$$dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \vec{v}dt\right| = \frac{1}{2M_p}\left|\vec{r} \times M_P\vec{v}\right|dt$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times M_p\vec{v}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_P}$$



$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2} = ma$$

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$\frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{GM_S}{r^2}$$

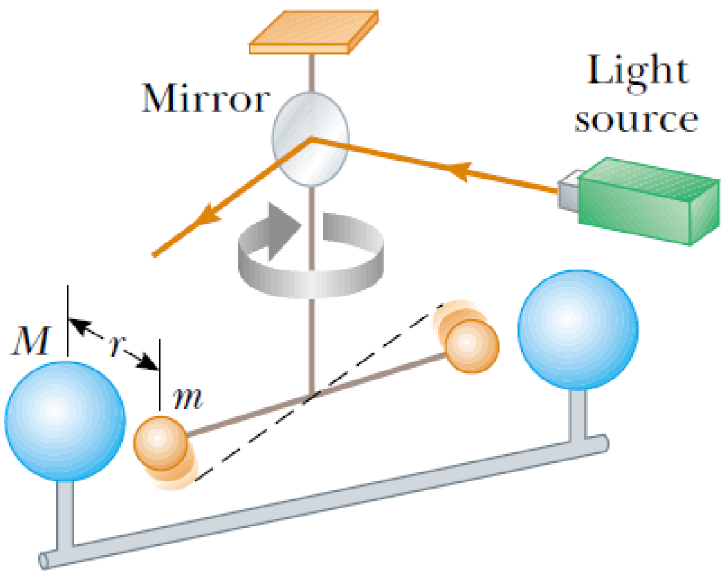
$$T^2 = \boxed{\frac{4\pi^2}{GM_S}} r^3 = Kr^3$$

Lei dos períodos

$$K = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2{,}97 \times 10^{-19}\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^3$$

Massa gravitacional

O experimento de Cavendish permitiu a verificação da expressão da força gravitacional e a determinação de G.



$$F_g = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Para um corpo em queda livre, temos:

$$F_g = \frac{G M_T m_g}{r^2}$$

$$a = \frac{F_g}{m_i} = \frac{G M_T}{r^2} \frac{m_g}{m_i}$$

Quando um corpo está submetido a uma força, aparece uma aceleração. A constante de proporcionalidade descreve a inércia deste corpo.

$$F = ma$$

Galileu verificou que todos os corpos caem com a mesma aceleração g. Portanto,

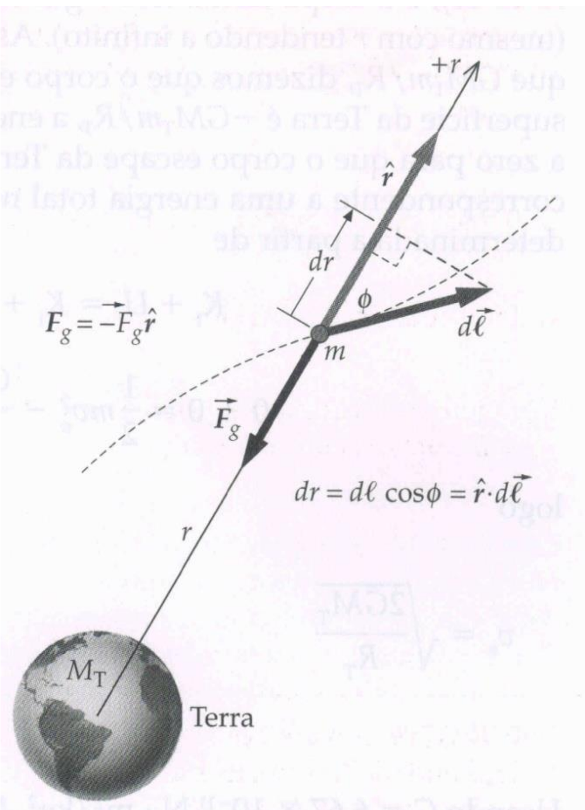
$$m_g / m_i = 1$$

Energia potencial gravitacional

Próximo à superfície da Terra, a força gravitacional da Terra sobre um corpo de massa m é igual a P=mg e a energia potencial gravitacional é U=mgh, onde $h=r-R_T$ e r é a distância entre os centros de massa.

Longe da superfície da Terra a força gravitacional depende da distância e portanto, a energia potencial gravitacional necessita ser redefinida.

$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2}$$



$$dU = -\vec{F}_g \cdot d\vec{l}$$

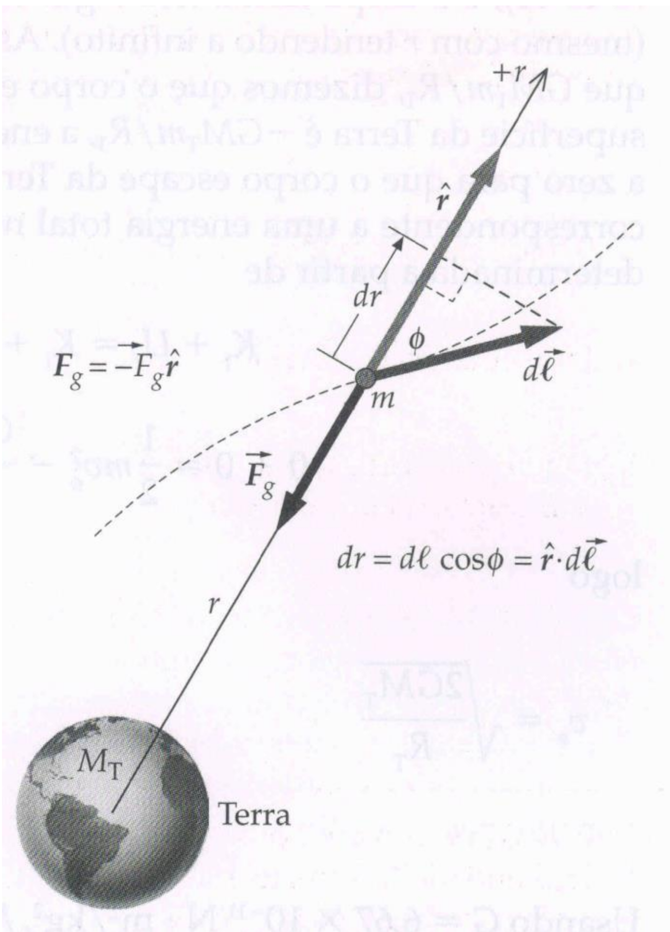
$$\vec{F}_g = -\frac{GM_T m}{r^2}\hat{r} = F_g \hat{r}$$

$$dU = F_g \hat{r} \cdot d\vec{l} = F_g dr = \frac{GM_T m}{r^2} dr$$

Energia potencial gravitacional

Longe da superfície da Terra a força gravitacional depende da distância e portanto, a energia potencial gravitacional necessita ser redefinida.

$$F_g = \frac{GM_T m}{r^2}$$



$$dU = -dW = F_g \hat{r}\cdot d\vec{l} = F_g dr = \frac{GM_T m}{r^2} dr$$

$$U - U_0 = GM_T m \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{GM_T m}{r} + U_0$$

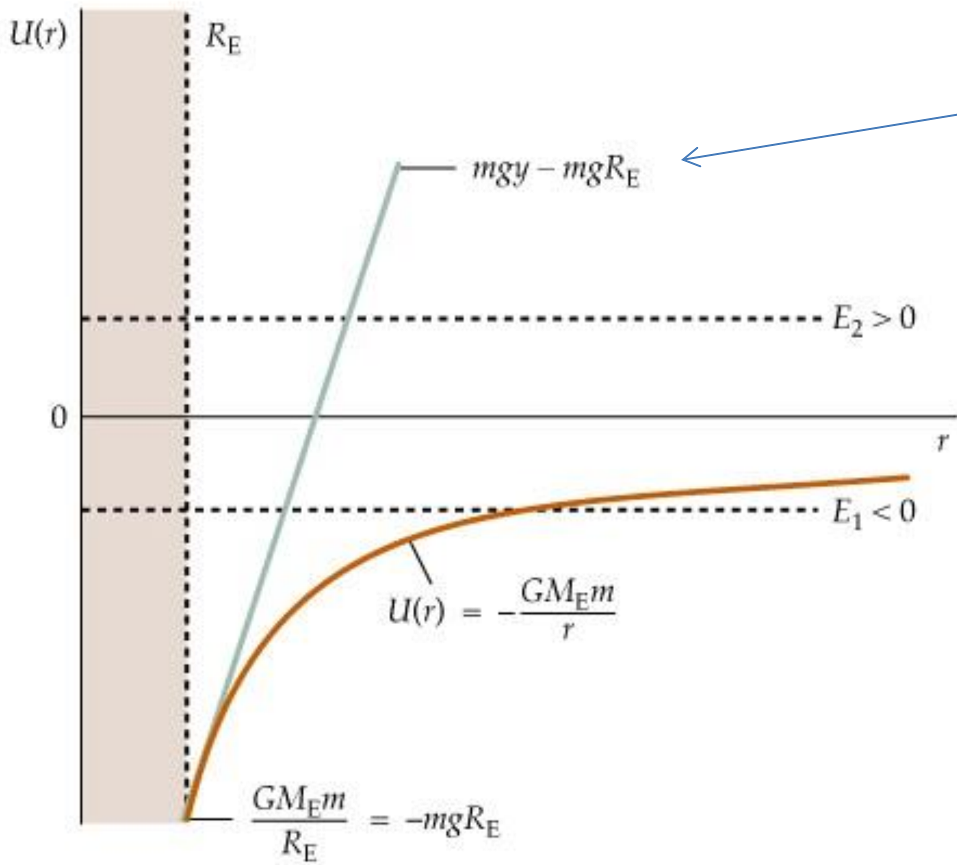
$$U = -\frac{GM_T m}{r} + U_0$$

Adota-se U_0=0. Portanto, a energia potencial gravitacional é nula para uma distância muito longa ("infinito").

$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$

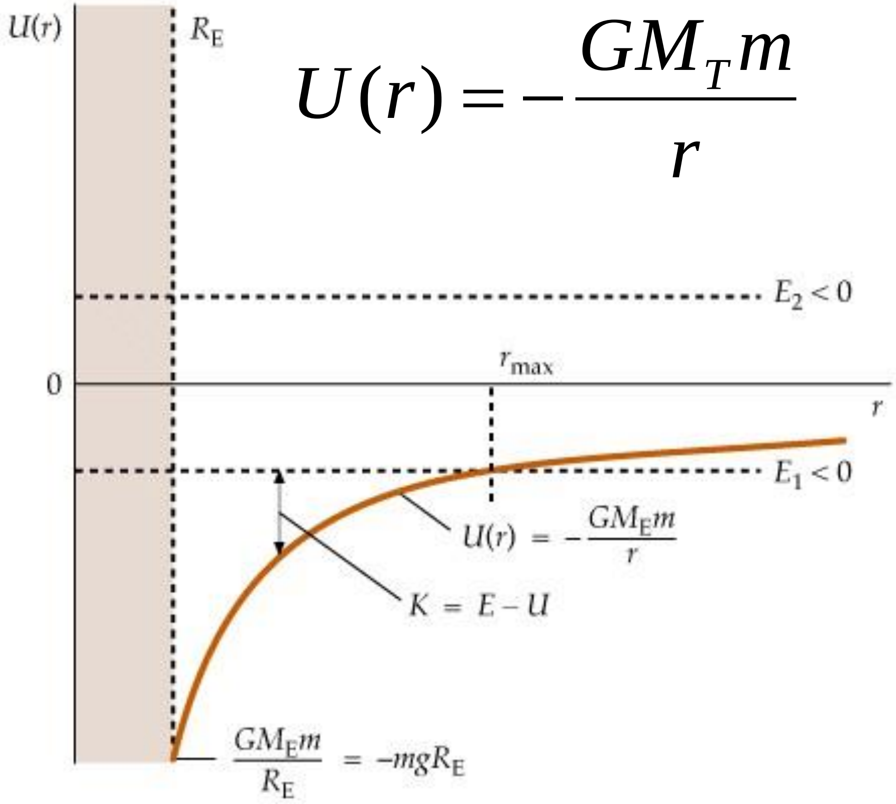
Energia potencial gravitacional

$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$



Próximo à superfície da Terra, a aproximação U=mgh é aceitável.

Energia potencial gravitacional



$$U(r) = -\frac{GM_T m}{r}$$

Classificação das órbitas

Se um corpo submetido à energia potencial gravitacional terrestre tiver uma energia mecânica E<0, ele estará confinado a uma região do espaço definida por r_{max}. Dizemos que o sistema é ligado e deverá descrever uma órbita fechada (elíptica).

Para E>0, o sistema não é ligado e a órbita será hiperbólica.

(Para E=0, o sistema não é ligado e a órbita será parabólica.)

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\frac{GMm}{r^2} = ma = \frac{mv^2}{r}$$

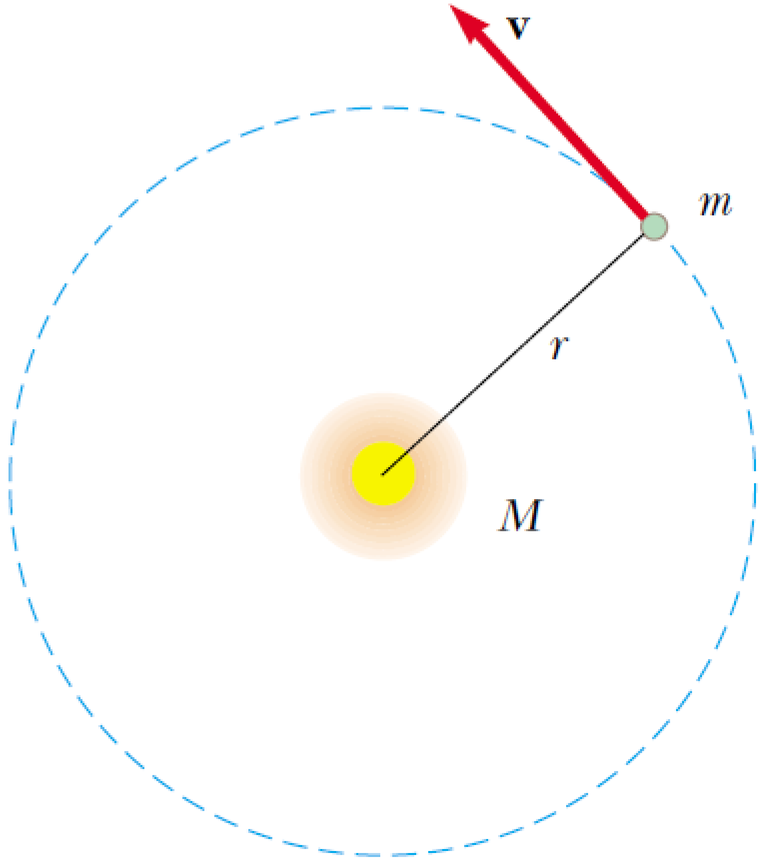
$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2r}}$$

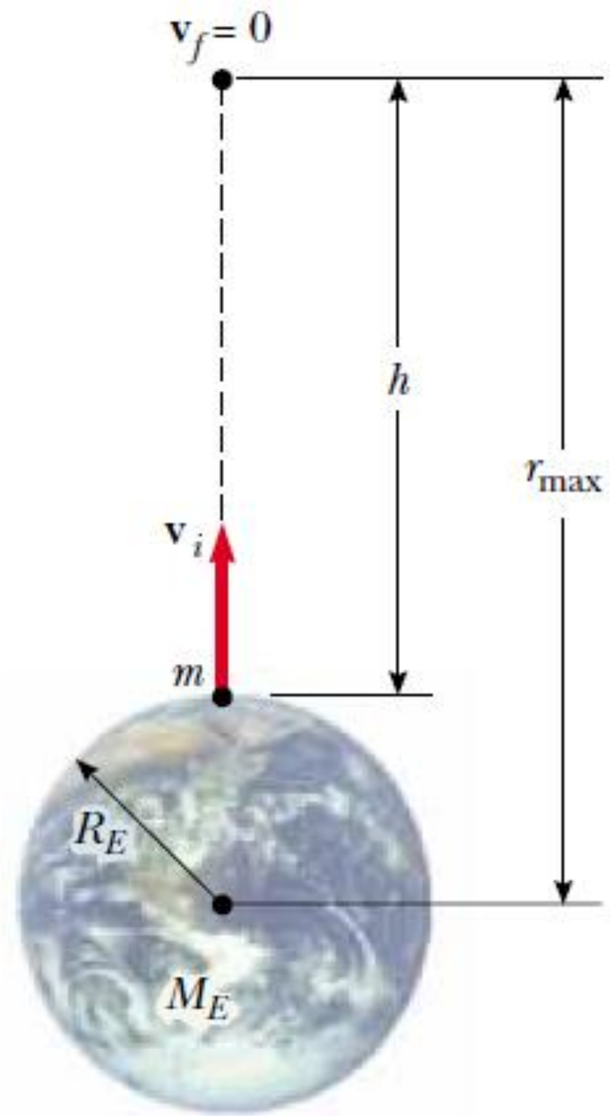
Órbita circular

$$\boxed{E = -\frac{GMm}{2a}}$$

Órbita elíptica



Alcance máximo atingido por um objeto lançado da Terra



$$\frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{G M_E m}{R_E} = -\frac{G M_E m}{r_{\max}}$$

$$v_i^2 = 2 G M_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_{\max}} \right)$$

$$h = r_{\max} - R_E$$

Velocidade de escape

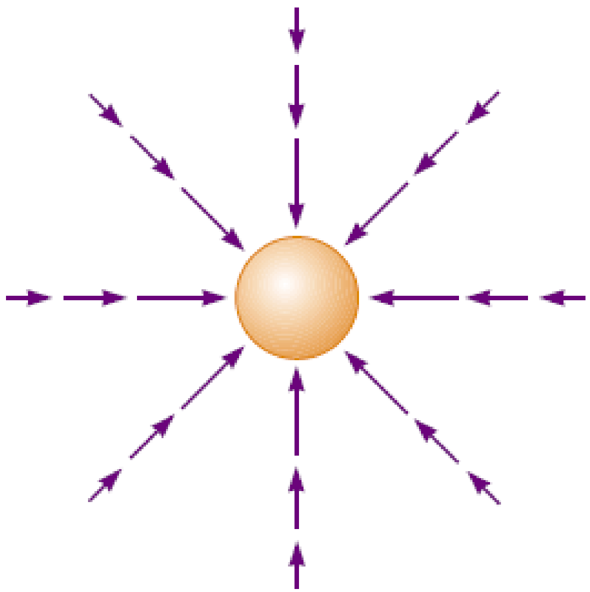
$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G M_T m}{R_T}$$

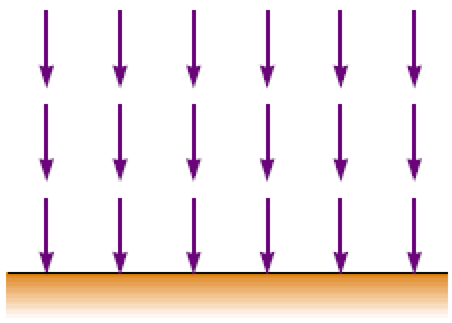
$$v_e = \sqrt{\frac{2 G M_T}{R_T}}$$

$$v_e = 11200 m/s \approx 11.2 \mathrm{Km/s}$$

Campo Gravitacional



(a)



(b)

Campo Gravitacional

A força gravitacional sobre uma partícula de massa m_2 é dada por

$$\vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}$$

Vale o princípio da superposição

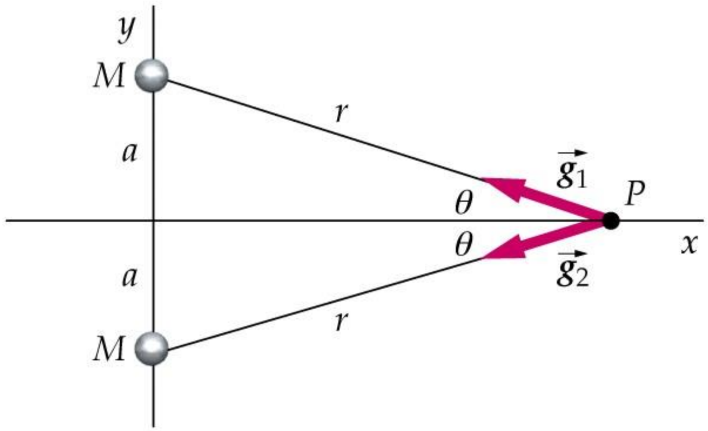
$$\vec{F}_{\mathrm{Res},1} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{i1}$$

A força gravitacional de um corpo estendido sobre uma partícula

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}$$

Campo Gravitacional

Duas Partículas Pontuais



O campo gravitacional gerado por cada uma das partículas tem magnitude:

$$g_1 = g_2 = \frac{GM}{r^2}$$

Como as componentes y dos campos gravitacionais se cancelam. O campo gravitacional resultante será dado pela soma das componentes x.

$$g_x = g_{1x} + g_{2x} = (g_1 + g_2)\cos\theta = \frac{2GM}{r^2}\cos\theta$$

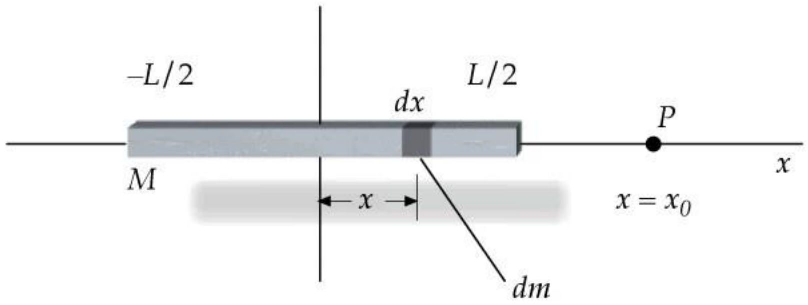
$$\cos\theta = \frac{x_P}{r} \Rightarrow \vec{g} = g_x \hat{i} = -\frac{2GM}{r^2}\frac{x_P}{r}\hat{i} = -\frac{2GMx_P}{r^3}\hat{i}$$

Portanto, em um ponto qualquer sobre o eixo x, temos:

$$\boxed{\vec{g} = -\frac{2GMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}\hat{i}}$$

Campo Gravitacional

Barra Fina e Homogênea



Como se trata de um corpo extenso, vamos integrar o efeito gravitacional de toda a sua extensão

$$\vec{g} = -\frac{\vec{F}}{m} = \int d\vec{g}$$

A contribuição de um infinitéssimo dx da massa da barra dm, localizada na posição x, em um ponto P sobre o eixo x, é

$$\left.\begin{aligned} dg_x &= \frac{Gdm}{r^2} \\ dm &= \lambda dx = \frac{M}{L}dx \end{aligned}\right\} \quad dg_x = \frac{G\lambda dx}{(x_0 - x)^2} \Longrightarrow g_x = \int dg_x$$

Portanto, em um ponto sobre o eixo x (x≥ L/2), temos:

$$g_x = G\lambda \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x_0 - x)^2} = \frac{G\lambda}{x_0^2 - (L/2)^2} \Longrightarrow \boxed{\vec{g} = -\frac{GM}{x^2 - (L/2)^2}\hat{i}}$$

Campo Gravitacional

Método atual de medida

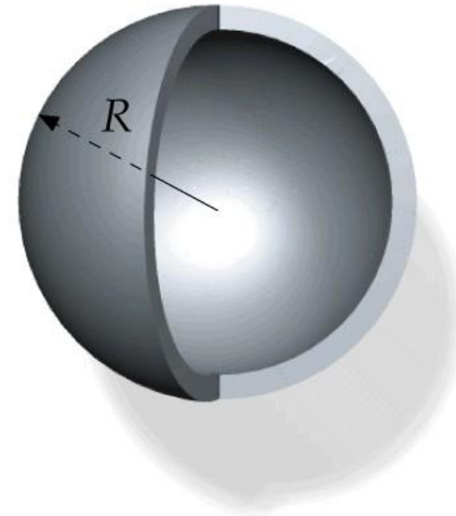
Dois satélites gêmeos, lançados em 2002, se movem em órbitas idênticas, espaçados de 220 Km.

Quando eles se aproximam de um ponto com densidade de massa maior ou menor do que o valor médio, as velocidades dos satélites sofrem variações que alteram momentaneamente a distância entre eles.

Assim, a medida precisa da distância entre os satélites permite mapear o campo gravitacional terrestre.

Campo Gravitacional

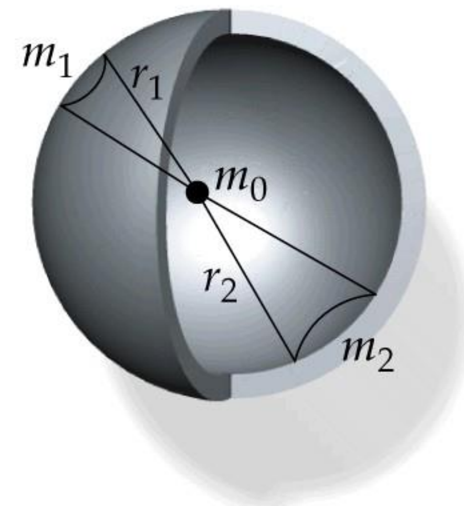
Casca Esférica



Já vimos que o campo gravitacional fora da casca esférica é o mesmo que seria obtido se toda a massa estivesse concentrada no centro de massa.

$$\boxed{\vec{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}}$$

Em um ponto qualquer no interior da casca esférica, temos que o efeito das massas m_1 e m_2, são proporcionais as áreas ocupadas, A_1 e A_2.



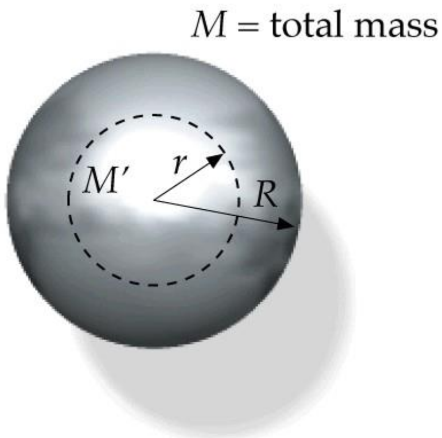
Mas, as áreas são proporcionais ao quadrado das distâncias r_1 e r_2. Então, temos:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow \frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

Então, $$g_r = g_1 - g_2 = \frac{Gm_1}{r_1^2} - \frac{Gm_2}{r_2^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{g} = 0}$$ **para r< R**

Campo Gravitacional

Esfera Maciça e Homogênea



Vamos usar o resultado para a casca esférica.

Dentro da esfera maciça, em um ponto a uma distância r do centro, o campo gravitacional será devido à massa M' que esteja em um raio inferior a r

$$M' = \frac{V'}{V} M = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} M = \frac{r^3}{R^3} M$$

$$g_r = \frac{GM'}{r^2} = \frac{GM}{r^2}\frac{r^3}{R^3}$$

Então,

$$\boxed{\vec{g}_r = -\frac{GMr}{R^3}\hat{r}}$$

para r< R