

## Complementos de Mecânica Clássica – Exercício em classe

17 de setembro de 2015, Vito R. Vanin

Escolhi este problema para treinarmos em classe a construção da lagrangiana em uma situação em que esse é o melhor caminho para encontrar a equação de movimento.

### Problema

Um haltere é formado por duas esferas, cada uma com massa  $M$ , ligadas por uma barra de comprimento  $L$ , uniforme e indeformável, cuja massa pode ser ignorada em relação a  $M$ . As dimensões da esfera são pequenas em relação à barra. Esse haltere é posicionado junto a um canto de parede lisa, em um lugar em que o piso também é liso, de modo que o atrito pode ser ignorado. O haltere, que forma inicialmente um ângulo  $\theta_0$  com a parede, cai movendo-se em um **plano vertical**. A aceleração local da gravidade é  $g$ .

- a) Encontre a equação de movimento do sistema.
- b) Adote  $L = 1$  m,  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup> e integre numericamente a equação de movimento. Determine o tempo para a queda do halter quando  $\theta_0 = 15^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

### Roteiro para a solução

#### a) *Obtenção da equação de movimento*

1. Faça um esboço do sistema. Represente nesse esboço os eixos coordenados  $x$  e  $y$ , a origem do sistema de referência, e o ângulo  $\theta$  que o halter forma com a parede
2. A equação de vínculo entre as posições das esferas do halter é uma função quadrática de  $x$  e  $y$ . Quando isso acontece, raramente vale a pena usá-la para eliminar uma das variáveis. Assim, escreva as posições das duas massas do halter em função de  $L$  e  $\theta$ .
3. Escreva a energia cinética  $T$  nas coordenadas cartesianas e use as equações do item 2 para transformar as derivadas de  $x$  e  $y$  em derivadas de  $\theta$  e obter  $T$  como função de  $\theta$ .
4. Escreva a energia potencial nas coordenadas cartesianas e transforme-a para uma função de  $\theta$ .
5. Escreva a lagrangiana e verifique que você pode usar  $\theta$  como coordenada generalizada.
6. Deduza a equação de movimento. Você conhece algum outro sistema que tenha a mesma equação de movimento? Especifique o limite de validade dessa equação de movimento
7. Note que a aproximação de pequenos ângulos é totalmente inútil neste problema.

Esse problema foi sugerido pelo Prof. Otaviano Helene

## Procedimento para integrar a equação de movimento em uma planilha

Leia as seções 9.5 e 9.6 do livro *Feynman Lectures on Physics*, onde está apresentado o procedimento que usaremos. Ele é particularmente interessante neste caso, em que a aceleração não depende da velocidade.

Este procedimento baseia-se na equação de movimento, que relaciona a aceleração  $a(t)$  em um instante com a posição  $x(t)$  naquele instante,  $a(x; t)$ , e ao conhecimento da posição e velocidade iniciais,  $x(0)$  e  $v(0)$ , se escolhermos começar do instante  $t = 0$  s.

i) Calcule  $a(0) = a(x(0); t = 0)$

ii) Escolha um intervalo  $\Delta t$  pequeno, digamos 0,05 s, e calcule

$$v(\Delta t) \cong v(0) + a(0) \cdot \Delta t \quad (1)$$

iii) Calcule a posição em um instante posterior. Quando estimamos a velocidade instantânea nos movimentos filmados dos experimentos virtuais, usamos a velocidade média em um intervalo simétrico em torno do instante de interesse

$$\bar{v}_{[t_{i-1}; t_{i+1}]} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

que é mais preciso que usar a equação (1) (veja o guia do sítio do fisfoto sobre o assunto, [http://www.fisfoto.if.usp.br/guia/roteiros/derivada\\_numerica.pdf](http://www.fisfoto.if.usp.br/guia/roteiros/derivada_numerica.pdf), para uma interpretação gráfica dessa propriedade). Dessa expressão, calculamos

$$x(t_{i+1}) = x(t_{i-1}) + v(t_i)(t_{i+1} + t_{i-1})$$

Portanto, calculamos

$$x(2\Delta t) = x(0) + v(\Delta t)(2\Delta t) \quad (2)$$

iv) Com esse valor de posição, pode-se calcular a aceleração

$$a(2\Delta t) = a(x(2\Delta t); 2\Delta t) \quad (3)$$

v) e com ela a nova velocidade,

$$v(3\Delta t) \cong v(\Delta t) + a(2\Delta t) \cdot \Delta t \quad (4)$$

vi) Itere o processo. As equações (2), (3) e (4), podem ser repetidas indefinidamente, uma vez que todos os valores necessários ao seu cálculo são conhecidos. A equação (1) é necessária para dar início ao processo e é usada uma única vez.

A planilha abaixo, extraída direto do programa, refere-se a este problema, com as condições iniciais  $\theta = 15^\circ$  e  $\omega = 0$  em  $t = 0$  s, com  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e  $L = 1$  m. Note que, pela natureza do problema, o cálculo perde o sentido depois que  $\theta = 90^\circ = \pi/2 \text{ rd} \sim 1,57 \text{ rd}$ . Da tabela se deduz que o tempo de queda da barra, nessa situação, é pouco maior que 0,8 s. Se queremos um resultado mais preciso, basta reduzir  $\Delta t$

Tabela. Planilha que ilustra o esquema de integração numérica da equação de movimento deste problema, quando as condições iniciais são  $\theta_0 = 15^\circ$  e  $\omega_0 = 0$  em  $t = 0$  s, com  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e  $L = 1 \text{ m}$ . O valor de  $\theta$  em  $t = 0,9$  s não tem sentido físico neste problema, mas pode ser usado para estimar o instante de queda  $t_{\text{queda}}$ , por interpolação linear entre os valores  $(t, \theta) = (0,8; 1,511)$  e  $(0,9; 1,982)$ . A caixa tracejada destaca a região da planilha que tem que ser programada com funções que fazem referência relativas e absolutas de modo a poderem ser copiadas para as células abaixo e repetir o esquema de cálculo das expressões 2 a 4. Os valores das duas primeiras linhas são a base do processo e a inserção desses valores e fórmulas não se repete ao longo da planilha.

$t$ (s)	$\theta$ (rd)	$\omega$ (rd/s)	$a$ (rd/s <sup>2</sup> )
0	<b>0,262</b>	<b>0,000</b>	2,536
0,05		0,127	
0,1	0,274		2,656
0,15		0,392	
0,2	0,314		3,024
0,25		0,695	
0,3	0,383		3,664
0,35		1,061	
0,4	0,489		4,606
0,45		1,522	
0,5	0,642		5,865
0,55		2,108	
0,6	0,852		7,378
0,65		2,846	
0,7	1,137		8,892
0,75		3,735	
0,8	1,511		9,782
0,85		4,714	
0,9	1,982		8,983