

## Complementos de Mecânica Clássica – Exercício em classe

14 de setembro de 2015, Vito R. Vanin

Escolhi este problema para treinarmos em classe a construção da lagrangiana, a dedução da equação de movimento e sua integração, até chegar na equação horária da posição. Este problema também pode ser resolvido usando as leis de Newton, de modo a facilitar a comparação das soluções. O sistema em questão não tem utilidade prática, mas podemos deduzir a equação horária com lápis e papel, sem necessidade de efetuar o cálculo numérico em um computador, uma vez que as equações horárias são analíticas. Nosso propósito é verificar o entendimento do assunto.

### Problema 7.10 do Marion.

Dois blocos, cada um com massa  $M$ , são conectados por um fio de comprimento  $L$ , inextensível e uniforme. Um bloco é posicionado sobre uma mesa horizontal lisa, e o outro é suspenso verticalmente por um fio que passa sem atrito por um apoio, de modo que a parte do fio acima da mesa fica esticado na direção horizontal. A aceleração local da gravidade é  $g$ .

Descreva o movimento do sistema

- a) ignorando a massa do fio.
- b) quando a massa do fio for  $m$ .

### Roteiro para a solução da parte a) fio sem massa

1. Faça um esboço do sistema. Represente nesse esboço os eixos coordenados  $x$  e  $y$  e a origem do sistema de referência.
2. Escreva a equação de vínculo, que é uma expressão que envolve as posições dos blocos nas direções horizontal e vertical, respectivamente  $x$  e  $y$ , e **pode** envolver o comprimento do fio e constantes que marcam o ponto de apoio em relação à origem do sistema de referência. Caso defina algum parâmetro que não esteja no enunciado do problema (por exemplo, a posição do apoio no sistema de referência adotado), registre suas propriedades e, se possível, inclua uma representação no esboço.
3. Escreva a energia cinética nas coordenadas cartesianas. Escolha uma das coordenadas como coordenada generalizada e use a relação de vínculo para eliminar a outra coordenada.
4. Escreva a energia potencial nas coordenadas cartesianas e, caso necessário, use a relação de vínculo para que ela seja função da coordenada generalizada escolhida.
5. Escreva a lagrangiana e, a partir da equação de lagrange, deduza a equação de movimento.
6. Compare a equação de movimento obtida com a que se deduz pela 2ª lei de Newton.
7. Integre a equação de movimento usando como condição inicial que o bloco está inicialmente parado em um ponto determinado, de sua escolha.

## Roteiro para a solução da parte b) fio com massa $m$

8. Determine a energia cinética do fio – note que o fio inteiro se move com a mesma velocidade que o bloco. Lembre-se que a *energia cinética* é um escalar, assim a direção da velocidade não tem importância na sua definição.

9. Determine a energia potencial do fio. Note que cada pequena parte pendurada da corda tem uma energia potencial *diferente*, de modo que você precisará integrar essa diferencial de energia potencial ao longo da corda. Atenção aos limites de integração, que devem valer para uma posição  $y$  arbitrária do bloco que está pendurado, de modo que inspecione seu esboço do item 2 com atenção para determiná-los.

10. Escreva a Lagrangiana e compare-a qualitativamente com a do item 5.

11. A partir da equação de Lagrange, deduza a equação de movimento. Verifique o que mudou em relação à do item 5. Classifique a equação diferencial.

12. A equação de movimento é linear e não homogênea. No entanto, o termo que não envolve a coordenada generalizada é uma constante, de modo que há dois procedimentos para resolver essa equação.

Tática i: absorver a constante na coordenada generalizada. Se você escolheu  $y$  como coordenada generalizada, substitua essa coordenada por  $y' = y - \frac{ML}{m}$  (a mudança é parecida, se você escolheu  $x$  como coordenada generalizada). A equação que sobra é linear e homogênea, cuja solução apontamos no item 13 abaixo.

Tática ii: a solução geral é a solução da homogênea somada com uma solução particular, que, neste caso, é uma constante  $\alpha$ ; determine-a e veja no item 13 abaixo como resolver a equação homogênea.

13. A equação de movimento é linear a coeficientes constantes e de 2ª ordem, e aqui vamos resolver a equação homogênea, que é o que falta após aplicar a manobra matemática de uma das táticas i e ii do item 12. A solução, então, será  $Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$  em que as todo-importantes grandezas  $p_1$  e  $p_2$  são as raízes da equação característica obtida pela substituição da solução formal  $e^{p t}$  na equação diferencial. As duas constantes  $A$  e  $B$  serão determinadas pelas condições iniciais do movimento.

14. Determine as constantes da equação horária usando as mesmas condições iniciais do item 7 acima.

15. Devemos ver como esse resultado se comporta quando  $m \ll M$  – é sempre importante verificar se o movimento previsto nas condições limites é o que se obtém usando essas condições desde o início da solução. Note que, nessa situação, para  $t$  pequeno, os expoentes são pequenos, de modo que podemos expandir as exponenciais em série de Taylor em torno de  $t = 0$ . Compare essa aproximação com o resultado obtido no item 7.

16. Em casa, compare os resultados dos itens 7 e 14 para alguns valores da razão  $m/M$ , a fim de enxergar como um cosseno hiperbólico pode virar uma parábola, com os parâmetros apropriados.