Complementos de Mecânica Clássica – Exercício em classe

29 de outubro de 2015, Vito R. Vanin

8.6 Duas massas m_1 e m_2 interagem somente pela força de gravidade e estão inicialmente paradas, quando a distância entre elas é r_0. Determine suas velocidades em função da distância de separação r.

Roteiro de Solução

1. Faça um esboço do sistema e represente os dois sistemas de coordenadas: o de Centro de Massa, com coordenadas r_1 e r_2, e o relativo, com coordenada r.
2. Escreva a expressão da energia do sistema em função de v_1, v_2 e r – equação (1).
3. Escreva a relação de vínculo entre v_1 e v_2 pelo fato deles estarem referidos ao Centro de Massa – equação (2).
4. Elimine uma das velocidades em (1) a partir da relação (2) - o resultado é a equação (3).
5. A partir da conservação de energia e da condição inicial do enunciado do problema, use a relação (2) para obter uma das velocidades a partir dos dados do problema – relação (4).
6. Obtenha a outra velocidade a partir da solução (4) substituída em (2); essa resposta, junto com (4), é a solução do problema.
7. Verifique se os resultados obtidos nos limites assintóticos e quando $m_1 = m_2$ fazem sentido físico.

8.18. Use as leis de Kepler das Órbitas e das Áreas para mostrar que a força de gravitação precisa ser central e depender do inverso do quadrado da distância.

Roteiro de Solução

1. Escreva a equação que dá a órbita de um planeta, $r(\theta)$ – equação (1).
2. Encontre a equação que relaciona a órbita com a lei de força – equação (2).
3. Substitua r da equação (1) nos termos que não envolvem $F(r)$ na equação (2) e simplifique o resultado.
4. Isole $F(r)$.
5. Interprete o significado físico da sua dedução matemática.

8.1 Dois corpos em interação por uma força central são colocados em uma região do espaço em que há um campo de gravitação uniforme. Mostre que é possível reduzir esse problema de dois corpos a um problema de um corpo, por meio de um desenvolvimento matemático parecido com o da seção 8.2 do livro.

Roteiro de Solução

1. Faça um esboço do sistema, escolha um sistema de referência e uma direção para o campo de gravidade uniforme. A fim de padronizarmos a discussão, escolha a direção Oz para esse campo uniforme, no sentido positivo.
2. Defina as coordenadas de centro de massa e relativa, em função das coordenadas das partículas.
3. Inverta as relações do item acima: determine as coordenadas das partículas a partir das coordenadas relativas e do Centro de Massa.
4. Escreva a lagrangiana do sistema, em um primeiro instante a partir das coordenadas em que os vários termos tem fórmulas mais simples e compactas.
5. Substitua na lagrangiana todas as ocorrências das coordenadas das partículas pelas coordenadas relativa e do centro de massa.
6. Identifique a massa reduzida e escreva a lagrangiana como soma de dois termos, um deles dependente apenas da coordenada relativa e outro, da coordenada do centro de massa.
7. Interprete o resultado obtido – o que ele tem de surpreendente?