Sistemas Lineares — Felipe M Pait

Lista de exercícios 2

1. Estude a prova de convergência da série que resolve a equação $\dot{x} = A(t)x(t)$.

2. O que será que acontece com 2 soluções da equação linear da questão anterior para condições iniciais diferentes?

3. Escrever e estudar 2 exemplos de sistemas lineares.

4. Verificar a seguinte propriedade: a equação linear matricial $\frac{d}{dt}Z(t) = -A^T(t)Z(t), Z(t_0) = I$, tem como solução $Z(t) = \Phi_A^T(t_0, t)$.

5. Mostre que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ se A e B comutam.

6. Diferenciando a série de Peano-Baker, mostre que

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\Phi(t, \tau) = \Phi(t, \tau)A(\tau).$$

7. Compute Φ para a matriz constante $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ somando diretamente a série de Peano-Baker.

8. Resolva a equação diferencial matricial $\frac{d}{dt}X(t) = X(t)A(t), X(t_0) = X_0$ em termos da matriz de transição de estados de $A(t)$.

9. Considere a matriz particionada $\begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) \\ 0 & A_{22}(t) \end{bmatrix}$ com os termos diagonais quadrados. Mostre que a matriz de transição de estados correspondente tem a forma $\begin{bmatrix} \Phi_{11}(t, \tau) & \Phi_{12}(t, \tau) \\ 0 & \Phi_{22}(t, \tau) \end{bmatrix}$. Obtenha expressões para os 2 termos diagonais. Se possível obtenha também uma expressão para $\Phi_{12}(t, \tau)$.

10. Compute e^{At} para $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Suponha que todos os autovalores do sistema linear invariante no tempo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

tenham parte real negativa, e considere o sinal de entrada $u(t) = m \sin \omega t$, com m um vetor do tamanho apropriado e $\omega > 0$. Em termos da função de transferência, determine o sinal periódico ao qual $y(t)$ tende à medida em que $t \to \infty$. Esse sinal, chamado de resposta em regime permanente senoidal, independe das condições iniciais.