4320196 – Física para Engenharia II - Prova P2 - 2011

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\ \ k = \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$

$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi);\ \ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right); \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$

$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos(\Omega t + \varphi)$

$x(t) = A(\Omega)\cos(\Omega t + \varphi(\Omega));$

$A(\Omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2 + \gamma^2\Omega^2}}; \tan\varphi(\Omega) = -\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

$Q = \frac{A(\omega_0)}{A(0)}; Q = \frac{\omega_0}{\gamma}; \tau_d = \gamma^{-1}$

Q1 - Um planeta de massa m orbita uma estrela de massa M. Considerando a massa da estrela muito maior que a do planeta, podemos descrever a energia mecânica do sistema (que deve ser constante) em termos do momento angular (outra constante do movimento), da distância instantânea entre o planeta e a estrela r e de sua velocidade radial dr/dt:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = U_e(r) + \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

onde G é a constante de gravitação universal. Note que a contribuição da velocidade angular para a energia cinética é completamente descrita em termos do momento angular L e do momento de inércia $I = mr^2$. A combinação deste termo com a energia potencial gravitacional dá origem a um potencial efetivo, dependente apenas de r.

(a) [0,75] Qual a distância r_e, correspondente ao mínimo da energia potencial efetiva?

(b) [0,5] Faça o gráfico da energia potencial efetiva $U_e(r)$.

(c) [0,75] Para pequenas flutuações em torno desta condição de equilíbrio, qual a frequência de oscilação de $r(t)$?

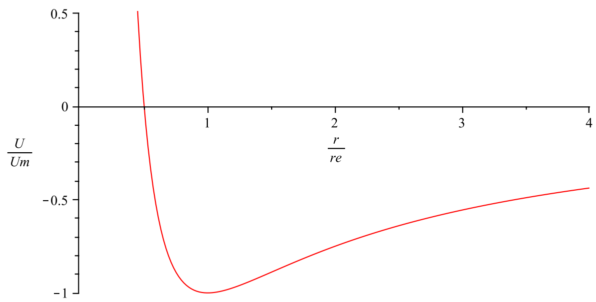
(d) [0,5] A oscilação de r irá fazer com que o planeta se aproxime e se afaste da estrela de forma periódica, combinando este movimento ao giro do mesmo em torno da estrela. Mostre que esta frequência de oscilação em torno de r_e é igual ao inverso do período da órbita, calculada para a condição de equilíbrio $r = r_e$, o que implica em uma órbita fechada.

Solução Q1:

a)

$$\frac{dU_e}{dr} = \frac{GMm}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} = 0$$
$$r_e = \frac{L^2}{GMm^2}, \qquad U_m = -\frac{G^2M^2m^3}{2L^2}$$

b)



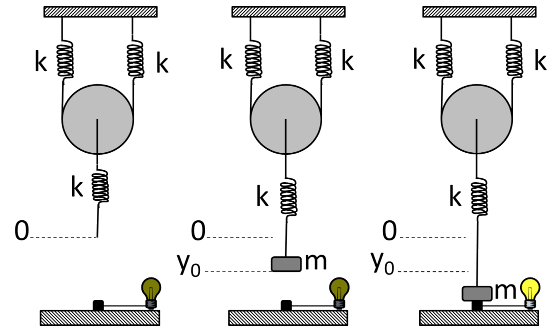
c)

$$\begin{aligned} \frac{d^2U_e}{dr^2} &= -2\frac{GMm}{r^3} + 3\frac{L^2}{mr^4} \\ \frac{d^2U_e}{dr^2}|_{r=r_e} &= \frac{G^4M^4m^7}{L^6} = k \\ E = U_m &+ \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{k\ (r-r_e)^2}{2} \\ \omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}} &\rightarrow \nu = \frac{G^2M^2m^3}{2\pi L^3} \end{aligned} \tag{1}$$

d)

$$\begin{aligned} \text{Aceleração centrípeta:} a_{cp} = (\frac{2\pi}{T})^2 r_e &= \frac{F}{m} = \frac{GMm}{r^2} \\ T = 2\pi\sqrt{\frac{r_e^3}{GMm}} &= 2\pi\frac{L^3}{G^2M^2m^3} = \frac{1}{\nu} \end{aligned} \tag{2}$$

Q2 - Considere um sistema como o da figura ao lado, composto por três molas idênticas (com constantes $k = 150$ N/m) de massas desprezíveis e uma polia, também de massa desprezível. Inicialmente o sistema está em equilíbrio na posição 0. Em um determinado instante, uma massa m é conectada a uma das molas, deslocando o sistema do valor y_0. Logo abaixo desta massa há um dispositivo sensível ao toque que acende uma lâmpada cada vez que é tocado pela massa. Despreze quaisquer efeitos de atrito no sistema.
Supondo que a distância entre a posição de equilíbrio da massa e a superfície do dispositivo sensível ao toque é de 10 cm e que, pra dar início ao movimento, você simplesmente encosta a massa no dispositivo e libera o sistema, calcule:



(a) [0,25] A posição de equilíbrio y_0 (em termos da massa m).

(b) [0,5] A equação do movimento resultante da massa m.

(c) [0,75] A solução da equação do movimento da massa m.

(d) [0,5] O valor que deve ser escolhido para a massa m para que a lâmpada acenda uma vez a cada 0,4 π segundos.

(e) [0,5] O trabalho realizado sobre o sistema em equilíbrio para dar início ao movimento descrito no ítem (d).

Solução Q2:

a)

$y(t) = \frac{y_1(t)}{2} + \frac{y_2(t)}{2} + y_3(t)$

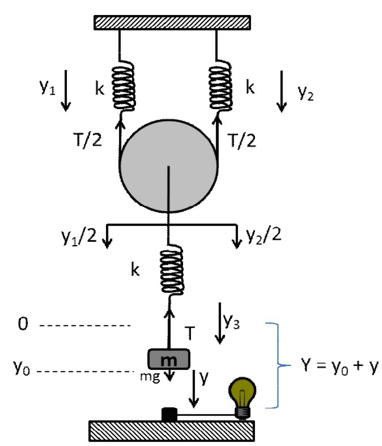
$T_1 = ky_1 = T_2 = ky_2$; $T_3 = ky_3$

como $T_3 = T = 2T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{T}{2}$, temos, no equilíbrio

$$y_0 = \frac{y_1(0)}{2} + \frac{y_2(0)}{2} + y_3(0) = \frac{T_1}{2k} + \frac{T_2}{2k} + \frac{T_3}{k}$$

$$y_0 = \frac{T}{4k} + \frac{T}{4k} + \frac{T}{k} = \frac{3T}{2k}$$

$mg = T = \frac{2k.y_0}{3} \Rightarrow \boxed{y_0 = \frac{3mg}{2k} = 0,1 \times m \text{ metros.}}$



b)

$$y(t) = \frac{y_1(t)}{2} + \frac{y_2(t)}{2} + y_3(t) = \frac{3T}{2k} = \frac{T}{K}$$

onde $K = \frac{2}{3}k$

Equação de movimento para a massa:

$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = mg - Ky(t) = -K\left(y(t) - \frac{mg}{K}\right) = -K\left(y(t) - y_0\right)$

Se $Y(t) = y(t) - y_0$

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} = -\frac{K}{m}Y(t)$$

c) Solução: $Y(t) = A\cos\omega_0 t + \varphi$

com $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{3m}} = \frac{10}{\sqrt{m}}$ rad/s

$$\left.\begin{array}{c} Y(0) = 0,1\text{m} \to A\cos\varphi = 0,1 \\ \dot{Y}(0) = 0 \to -A\omega_0\sin\varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = 0; A = 0,1.$$

$\boxed{Y(t) = 0,1\cos\frac{10}{\sqrt{m}}t}$.

d) Período: $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi.\frac{\sqrt{m}}{10}$

Logo $m = \left(10\frac{T}{2\pi}\right)^2$

Se $T = 0,4\pi$ então $\boxed{m = (10 \times 0,2)^2 = 4 \text{ kg.}}$

e) Trabalho realizado sobre a mola para mover a massa 10 cm a partir da posição de equilíbrio:

$W = \Delta U = \frac{1}{2}KY(0)^2$

ou seja

$\boxed{W = \frac{1}{2} \times 100 \times (0,1)^2 = 0,5 \text{ J}}$

Q3 - Considere um sistema massa-mola, composto por uma mola de constante k e uma massa m_0, sujeito a uma força de amortecimento proporcional à velocidade dada por $F_a = -\rho\frac{dx}{dt}$. O sistema está no regime crítico de amortecimento.

(a) [0,5] Determine, em função de k e m_0, o valor da constante de amortecimento ρ.

(b) [0,5] Sabendo que o sistema parte da posição x_0 com velocidade nula, determine a posição do sistema em função do tempo em termos de k e m_0.

(c) [0,5] Se trocarmos a massa do sistema por uma massa $m_1 = \frac{m_0}{2}$ qual será o regime de oscilação do sistema? Justifique.

(d) [0,5] Sabendo que com a nova massa o sistema parte da posição x_0 com velocidade nula, determine a posição do sistema em função do tempo em termos de k e m_0.

(e) [0,5] Se trocarmos agora a massa do sistema por uma massa $m_2 = 2m_0$ qual será o regime de oscilação do sistema? Justifique.

Solução Q3:

(a) Determine, em função de k e m_0, o valor da constante de amortecimento.

No regime crítico:

$$\frac{\gamma_0}{2} = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho}{2m_0} = \sqrt{\frac{k}{m_0}}$$

A constante de amortecimento é dada por:

$$\boxed{\rho = 2\sqrt{km_0}}$$

(b) Sabendo que o sistema parte da posição x_0 com velocidade nula, determine a posição do sistema em função do tempo em termos de k e m_0.

No regime crítico a posição em função do tempo é dada por:

$$x(t) = (a + bt)e^{-\frac{\gamma_0}{2}t}$$

Usando as condições iniciais temos:

$$x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad a = x_0$$

Velocidade:

$$\frac{dx}{dt}(t) = be^{-\frac{\gamma_0}{2}t} - \frac{\gamma_0}{2}(a + bt)e^{-\frac{\gamma_0}{2}t}$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = b - \frac{\gamma_0}{2}a = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\gamma_0}{2}x_0$$

Dessa forma a posição do sistema em função do tempo será dada por:

$$\boxed{x(t) = x_0\left(1 + \frac{\gamma_0}{2}t\right)e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} = x_0\left(1 + \sqrt{\frac{k}{m_0}}t\right)e^{-\sqrt{\frac{k}{m_0}}t}}$$

(c) Se trocarmos a massa do sistema por uma massa $m_1 = \frac{m_0}{2}$ qual será o regime de oscilação do sistema? Justifique.

Para $m_1 = \frac{m_0}{2}$ temos:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m_0}} = \sqrt{2}\omega_0$$

$$\frac{\gamma_1}{2} = \frac{\rho}{m_0} = 2\frac{\gamma_0}{2}$$

Dessa forma:

$$\boxed{\frac{\gamma_1}{2} > \omega_1 \quad \Rightarrow \quad \text{o sistema estará no regime supercrítico de amortecimento}}$$

(d) Sabendo que com a nova massa o sistema parte da posição x_0 com velocidade nula, determine a posição do sistema em função do tempo em termos de k e m_0.

Solução para o regime supercrítico:

$$x(t) = ae^{-\left(\frac{\gamma_1}{2}-\beta\right)t} + be^{-\left(\frac{\gamma_1}{2}+\beta\right)t}$$

onde *beta* é dado por:

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma_1^2}{4} - \omega_1^2} = \sqrt{2\frac{k}{m_0}}$$

Usando as condições iniciais temos:

$$x(0) = a + b = x_0$$

Velocidade:

$$\frac{dx}{dt}(t) = -a\left(\frac{\gamma_1}{2} - \beta\right)e^{-\left(\frac{\gamma_1}{2}-\beta\right)t} - b\left(\frac{\gamma_1}{2} + \beta\right)e^{-\left(\frac{\gamma_1}{2}+\beta\right)t}$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = -a\left(\frac{\gamma_1}{2} - \beta\right) - b\left(\frac{\gamma_1}{2} + \beta\right) = 0$$

Combinando as duas equações temos:

$$a = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\gamma_1}{2\beta}\right) = \frac{x_0}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$b = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\gamma_1}{2\beta}\right) = \frac{x_0}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Dessa forma a posição do sistema em função do tempo será dada por:

$$\boxed{x(t) = \frac{x_0}{2}\left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{k}{m_0}}t} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{k}{m_0}}t}\right]}$$

(e) Se trocarmos agora a massa do sistema por uma massa $m_2 = 2m_0$ qual será o regime de oscilação do sistema? Justifique.

Para $m_2 = 2m_0$ temos:

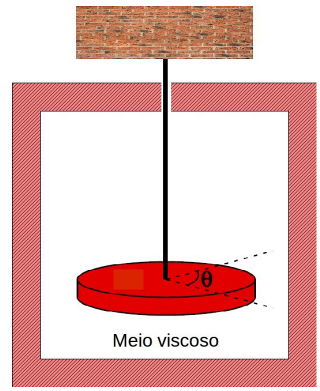
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{2m_0}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\gamma_2}{2} = \frac{\rho}{4m_0} = \frac{1}{2}\frac{\gamma_0}{2}$$

Dessa forma:

$$\boxed{\frac{\gamma_2}{2} < \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \text{o sistema estará no regime subcrítico de amortecimento}}$$

Q4 - Um pêndulo de torção de massa M=5,0 kg, imerso em um meio viscoso, oscila em torno do seu ponto de equilíbrio obedecendo a seguinte equação de movimento:



$$I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} - k\theta$$

onde I=3,0 kg.m^2, k=2,0 N.m e $b = 3\sqrt{2}$ N.m.s.

(a) [1,0] Determine a solução da equação de movimento considerando as seguintes condições iniciais: $\theta(t=0) = 0,5\ rad$ e $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

(b) [0,5] Qual é o tempo necessário para que a amplitude do movimento caia à metade?

Suponha agora que o pêndulo esteja sob a ação de um torque externo periódico $\tau(t) = \sqrt{7}\cos(\frac{\sqrt{3}}{3}t)$.

(c) [0,25] Calcule a amplitude da solução estacionária.

(d) [0,75] Dadas as mesmas condições iniciais do ítem (a), qual é o tempo necessário para que a amplitude da solução transiente seja 1/6 da amplitude da solução estacionária?

Solução Q4:

$\ddot{\theta} + \frac{b}{I}\dot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0$

$\gamma = \frac{b}{I} = \sqrt{2}\ rad/s \quad$ e $\quad \omega_0 = \frac{k}{I} = \sqrt{\frac{2}{3}}\ rad/s \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{6}}\ rad/s$

Como $\omega_0 > \frac{\gamma}{2} \quad \Rightarrow \quad$ amortecimento sub-crítico

(a)

$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega t + \varphi)$

$\dot{\theta}(t) = -\frac{\gamma}{2}\theta_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega t + \varphi) - \omega\theta_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}\sin(\omega t + \varphi)$

Condições iniciais:

$\theta_0 \cos(\varphi) = \frac{1}{2} \quad (1)$

$-\frac{\gamma}{2}\theta_0 \cos(\varphi) - \omega\theta_0 \sin(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan(\varphi) = -\frac{\gamma}{2\omega} \quad (2)$

$\varphi = \tan^{-1}(-\sqrt{3}) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}\ rad$ ou $\varphi = \frac{-\pi}{3}\ rad$

Substituindo em (1) temos que $\theta_0 = 1\ rad$

Portanto:

$\theta(t) = e^{-\frac{\sqrt{2}t}{2}} \cos(\sqrt{\frac{1}{6}}t + \frac{5\pi}{3})$ ou $\theta(t) = e^{-\frac{\sqrt{2}t}{2}} \cos(\sqrt{\frac{1}{6}}t - \frac{\pi}{3})$

(b)

$e^{-\frac{\sqrt{2}t}{2}} = \frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}$

$-\frac{\sqrt{2}t}{2} = \ln(\frac{1}{2})$

$t = \sqrt{2}\ln(2)\ s$

(c)

$\tau(t) = \sqrt{7}\cos(\frac{\sqrt{3}}{3}t) \quad \Rightarrow \quad \tau_o = \sqrt{7}\ N\ m$ e $\Omega = \frac{\sqrt{3}}{3}\ rad/s$

Solução particular: $\Theta_p(t) = \Theta_0(\Omega)\cos[\Omega t + \phi(\Omega)]$

$\Theta_0(\Omega) = \frac{\tau_o}{I}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$

$\Theta_0(\Omega) = \frac{\sqrt{7}}{3}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}}}$

$\Rightarrow \quad \Theta_0(\Omega) = 1\ rad$

(d)

$\theta_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} = \frac{1}{6}\Theta_0(\Omega)$

$e^{-\frac{\sqrt{2}t}{2}} = \frac{1}{6}$

$\frac{\sqrt{2}t}{2} = \ln(6)$

$t = \sqrt{2}\ln(6)\ s$