4320196 – Física para Engenharia II - Prova P1 - 2011

Observações:

- Preencha todas as folhas com o seu nome, número USP, número da turma e nome do professor.
- A prova tem duração de 2 horas.
- Não somos responsáveis por provas com identificação insuficiente.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ou cartão USP ao assinar a lista de presença.
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha de resposta com o mesmo número.
- **Justifique** todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).
- Resultados serão anunciados no site da disciplina.

Formulário:

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\begin{cases} x' = \gamma(v)\,(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v.x}{c^2}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} u'_x = \dfrac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \\ u'_{y,z} = \dfrac{u_{y,z}}{\gamma(v)\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \end{cases}$$

$$\vec{p} = \gamma(u) m_0 \vec{u} \qquad E = \gamma(u) m_0 c^2$$

$$E = K + m_0 c^2 \qquad E^2 = (pc)^2 + \left(m_0 c^2\right)^2$$

$$\gamma^2_{(u)} u^2 = \left(\gamma^2_{(u)} - 1\right) c^2 \qquad m(u) = \gamma(u) m_0$$

Questão 1: Estágio interestelar

No ano 2111 a USP assinou um convenio de cooperação interplanetária com a Universidade de Estudos Galácticos localizada no planeta Zion em Alfa Centauri. Um aluno da Poli foi escolhido para fazer um estágio de seis meses nessa Universidade, mas precisava ainda fazer a última prova do curso de Física. Uma dificuldade: o professor tinha viagem marcada na mesma ocasião para um sistema planetário localizado, em relação à Terra, em uma direção diametralmente oposta à de Alfa Centauri. A prova deveria ter a duração de uma hora (no referencial do aluno) e ficou combinado que ela teria início no instante em que as espaçonaves do professor e do aluno se cruzassem na posição da Terra, estando já em rota de cruzeiro em direção aos seus destinos (com respectivas velocidades constantes $v_P = +c/2$ e $v_A = -c/2$, ambas em relação à Terra). Nesse momento, os relógios nos três sistemas de referência (Terra, Professor e Aluno) foram sincronizados. O professor, que sabia relatividade, propôs enviar um sinal luminoso para indicar o encerramento da prova. (Obs. Para efeitos de resolução deste problema, assuma que a Terra, o professor e o aluno permanecerão colineares).

(a) [0,5] Qual a velocidade do aluno em relação ao professor?

(b) [0,5] Calcule o tempo de duração da prova no referencial do professor.

(c) [1,0] Quanto tempo após o início da prova, deveria o professor, de acordo com seu próprio relógio, enviar o sinal indicando o seu término, de modo que o estudante receba esse sinal quando tiver transcorrido uma hora no seu próprio referencial?

(d) [0,5] A que distância, medida em relação ao sistema da Terra, estava o estudante quando recebeu o sinal de encerramento da prova? Apresente sua resposta em metros.

Solução Q1:

- **Item a**: A velocidade do professor em relação à Terra é $v_P = +c/2$ e a do aluno em relação à Terra é $v_A = -c/2$. A velocidade do aluno em relação ao professor é dada então por:
$$v_A{'} = \frac{v_A - v_P}{1 - \frac{v_A v_P}{c^2}} = \frac{-c}{1 + \frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}c.$$

- **Item b**: No referencial do aluno a prova tem a duração de uma hora ($T_A = 1$ hora) ao passo que no do professor o tempo de duração, T_P, é dado por:
$$T_P = \gamma\,(v)\,T_A.$$
onde $v = v_A{'}$ é a velocidade do aluno em relação ao professor. Dessa forma,
$$\gamma\,(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - (4/5)^2}} = \frac{5}{3}$$
e
$$T_P = \frac{5}{3} \text{ hora}$$

- **Item c:** No referencial em que o aluno está em repouso (S), o referencial do professor ($S\,'$) move-se com velocidade $v = \frac{4}{5}c$. A prova tem a duração total T_A em S.
Em $S\,'$, o professor emite o sinal indicando encerramento da prova após um intervalo de tempo $\Delta t'_P$ do seu início. Em S esse intervalo de tempo é
$$\Delta t_P = \gamma\,(v)\,\Delta t'_P,$$
sendo
$$\Delta x_P = v\Delta t_P = \gamma\,(v)\,v\Delta t'_P$$
o correspondente deslocamento do professor.
No referencial S, para o sinal luminoso chegar ao aluno, será necessário um intervalo de tempo adicional:
$$\Delta t_A = \frac{\Delta x_P}{c} = \frac{v}{c}\Delta t_P.$$
Para que a prova tenha a duração efetiva de uma hora no referencial do aluno, esse intervalo de tempo que o sinal emitido pelo Professor levará para chegar até o aluno terá que ser levado em consideração:
$$\begin{aligned} T_A &= \Delta t_P + \Delta t_A \\ &= \Delta t_P + \frac{v}{c}\Delta t_P \\ &= \gamma\,(v)\,\Delta t'_P + \frac{v}{c}\gamma\,(v)\,\Delta t'_P \\ &= \gamma\,(v)\,\Delta t'_P\left(1 + \frac{v}{c}\right) \end{aligned}$$
e portanto
$$\Delta t'_P = \frac{T_A}{\gamma\,(v)\left(1 + \frac{v}{c}\right)}$$

Substituindo, $T_A = 1$ hora, $\gamma(v) = \frac{5}{3}$ e $\frac{v}{c} = \frac{4}{5}$ obtém-se que o professor deverá enviar o sinal

$$\Delta t'_P = \frac{3}{5}\frac{1}{1+\frac{4}{5}} = \frac{1}{3} \text{ hora}$$

após o início da prova.

- **Item d:** O intervalo de tempo de uma hora (no referencial do aluno) corresponde, para um observador na Terra a:

$$T_T = \gamma(v_A)\, T_A,$$

onde

$$\gamma(v_A) = \frac{1}{\sqrt{1-(1/2)^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Dessa forma, a distância do aluno à Terra ao fim da prova é:

$$\Delta x_A = |v_A|\, T_T = |v_A|\,\gamma(v_A)\, T_A = |v_A|\,\gamma(v_A)\cdot 3600$$
$$\Delta x_A = \frac{c}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}3600 = 1200\sqrt{3}c \text{ metros.}$$

Questão 2: Futebol relativístico

Imagine um jogo de futebol relativístico em um Universo onde $c = 50$ m/s. Um atacante move-se em direção ao gol adversário com velocidade $v = 30$ m/s (em relação ao campo de futebol). Em seu referencial, S', este atacante passa pelo zagueiro adversário em t'_2 e observa seu companheiro a uma distância $x'_1 = -L_0$ lançar a bola à sua frente no instante t'_1. No referencial S, o juiz e o zagueiro estão na grande área e em repouso com relação ao campo. Nesse referencial, as regras do futebol determinam que seja marcado impedimento se o atacante passar pelo zagueiro (instante t_2) antes de seu companheiro lançar a bola (instante t_1).

(Obs. Para efeitos de resolução deste problema, assuma que as posições dos jogadores e do juiz permanecem colineares, com mesma coordenada $y = y' = 0$).

(a) [0,5] Para o atacante em S', $L_0 = 50$ m e ele percebe que ultrapassou o zagueiro antes do lançamento de seu companheiro tal que $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -0,5$ segundos. O juiz deve marcar impedimento?

(b) [0,75] No item anterior, existe um comprimento L_0 limite que determina a existência ou não do impedimento? Obtê-lo em caso positivo.

(c) [0,75] Na continuação do lance, o juiz permanece junto ao zagueiro (ainda dentro da grande área) em $x = 0$, mas tem sua visão do lance encoberta por ele. No referencial S do juiz, o atacante cai 0,08 segundos após passar pelo zagueiro. Um movimento brusco do zagueiro sugeriu a intenção de derrubar o atacante. Como critério, o juiz marcaria pênalti se, no referencial S' do atacante, a queda ocorrer após a passagem do atacante pelo zagueiro. Neste caso, determine qual atitude o juiz deve tomar.

(d) [0,5] No ítem anterior, existe uma velocidade limite de um observador externo onde o jogador cai antes de passar pelo zagueiro? Determine-a em caso positivo.

Solução Q2:

1. No referencial S' do atacante ocorrem dois eventos: seu companheiro em $x'_1 = -L_0$ lançando a bola em t'_1 e o atacante em $x'_2 = 0$ passando pelo zagueiro adversário em t'_2. Usando as transformações de Lorentz, no referencial S esses eventos ocorrem em

$$\begin{array}{lcl} x_1 = \gamma(v)(x'_1 + vt'_1) & \quad \text{e} \quad & x_2 = \gamma(v)(x'_2 + vt'_2) \\ t_1 = \gamma(v)\left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}\right) & & t_2 = \gamma(v)\left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}\right) , \end{array}$$

ou seja,

$$\Delta x = \gamma(v)\left[\Delta x' + v\Delta t'\right] \quad \text{e} \quad \Delta t = \gamma(v)\left[\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right] , \tag{1}$$

onde

$$\Delta x = x_2 - x_1 , \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1 , \quad \Delta t = t_2 - t_1 \quad \text{e} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1 .$$

Sabendo que $\Delta x' = L_0 = 50$ m, $\Delta t' = -0,5s$ e

$$\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - (30/50)^2} = 1/\sqrt{16/25} = 5/4$$

obtemos

$$\Delta t = \frac{5}{4}\left[-0,5s + \frac{(30m/s)\times L_0}{(50m/s)^2}\right] = \frac{5}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\right)s = \frac{1}{8}s\,. \qquad (2)$$

Portanto, em S o atacante passa o zagueiro $0,125$ segundos após o lançamento da bola e o juiz não deve marcar impedimento.

2. A equação (2) mostra que é possível uma mudança de sinal em Δt para um L_0 limite tal que

$$L_0 = 0,5s \times \frac{(50m/s)^2}{30m/s} = \frac{125}{3}m \approx 41,6m\,.$$

3. As transformações de Lorentz de S para S', de maneira análoga ao item (a), fornecem

$$\Delta x' = \gamma(v)\left[\Delta x - v\Delta t\right] \quad \text{e} \quad \Delta t' = \gamma(v)\left[\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right]\,, \qquad (3)$$

onde consideramos agora o evento 1 como sendo a passagem do atacante pelo zagueiro, e o evento 2 como a queda do atacante. Com isso, o juiz deve marcar pênalti se $\Delta t' > 0$. Sabendo que $\Delta x' = 0$, ou seja, que entre os eventos 1 e 2 o atacante permanece em repouso em seu próprio referencial S', temos

$$\Delta x = v\Delta t\,.$$

Substituindo na equação para $\Delta t'$ chegamos a

$$\Delta t' = \gamma(v)\left[\Delta t - \frac{v^2\Delta t}{c^2}\right] = \gamma(v)(1-v^2/c^2)\Delta t = \frac{\Delta t}{\gamma(v)}\,. \qquad (4)$$

Em números,

$$\Delta t' = 0,08s \times \frac{4}{5} = 0,064s\,,$$

ou seja, $\Delta t' > 0$ e o juiz deve marcar o pênalti.

4. Vamos introduzir um terceiro referencial S'' de um observador externo com uma dada velocidade V em relação a S'. As coordenadas espaço-temporais dos eventos em S'' são dadas por

$$\begin{array}{lcl} x''_1 = \gamma(V)(x'_1 - Vt'_1) & \quad \text{e} \quad & x''_2 = \gamma(V)(x'_2 - Vt'_2) \\ t''_1 = \gamma(V)\left(t'_1 - \frac{Vx'_1}{c^2}\right) & & t''_2 = \gamma(V)\left(t'_2 - \frac{Vx'_2}{c^2}\right)\,, \end{array}$$

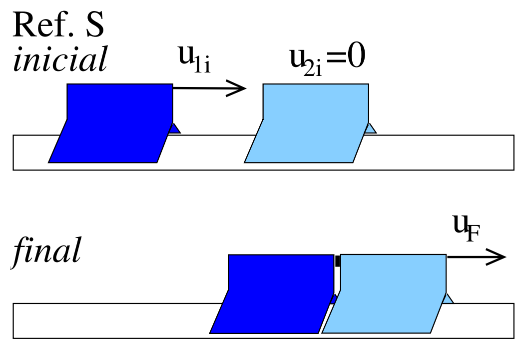
ou seja,

$$\Delta t'' \equiv t''_2 - t''_1 = \gamma(V)\left[\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right] = \gamma(V)\Delta t'\,.$$

Como $\Delta t' > 0$ pelo item anterior, concluímos pelo resultado acima que não existe uma velocidade V capaz de alterar o sinal de $\Delta t''$, e com isso, alterar a sequência dos eventos 1 e 2.

Questão 3: Colisão em 1D

Em um laboratório, é realizado um experimento que estuda a colisão completamente inelástica de dois objetos de massas de repouso m_0 e m_2. No referencial S do laboratório, a velocidade inicial do objeto 1 é $u_{1i} = \frac{4c}{5}$ enquanto que o objeto 2 está parado ($u_{2i} = 0$, vide figura). Após a colisão, os objetos permanecem juntos formando um terceiro corpo, que viaja com velocidade $u_F = \frac{3c}{5}$. Expresse suas respostas em termos de m_0 e c.



(a) [0,6] Calcule a massa de repouso do corpo formado após a colisão.

(b) [0,6] Calcule a massa de repouso m_2 do objeto 2.

(c) [0,6] Calcule o momento e a energia relativísticas do sistema em um referencial inercial que se move com velocidade horizontal $v = \frac{4c}{5}$ em relação ao referencial do laboratório.

(d) [0,7] Em um outro referencial inercial, as velocidades dos objetos antes da colisão são iguais em módulo e direção mas com sentidos opostos ($u'_{1i} = -u'_{2i}$). Calcule a velocidade v_2 ($v_2 > 0$) desse referencial em relação ao referencial do laboratório.

Solução Q3:

(a) No Ref. S, o momento inicial e final total serão

$$\begin{aligned} P_i &= m_1 u_{1i} + 0 = \gamma_{1i} m_0 u_{1i} = \tfrac{5}{3} m_0 \tfrac{4c}{5} = \tfrac{4}{3} m_0 c \\ P_f &= M_F u_F = \gamma_F M_0 u_F = \tfrac{5}{4} M_0 \tfrac{3c}{5} = \tfrac{3}{4} M_0 c \end{aligned}$$

Logo, por conservação de momento linear, $P_f = P_i \Rightarrow M_0 = \frac{16}{9} m_0$

(b) No Ref. S, a energia relativística inicial e final será:

$$\begin{aligned} E_i &= m_1 c^2 + m_2 c^2 = \gamma_{1i} m_0 c^2 + m_2 c^2 = \tfrac{5}{3} m_0 c^2 + m_2 c^2 \\ E_f &= M_F c^2 = \gamma_F M_0 c^2 = \tfrac{5}{4} \tfrac{16}{9} m_0 c^2 = \tfrac{20}{9} m_0 c^2 \end{aligned}$$

Por conservação de energia relativística, $E_f = E_i \Rightarrow m_2 = \frac{20}{9} m_0 - \frac{5}{3} m_0 = \frac{5}{9} m_0$.

(c) **Método 1** (E',P' antes da colisão):

Em S': $u'_{1i} = \frac{u_{1i} - v}{(1 - \frac{u_{1i} v}{c^2})} = 0$ e $u'_{2i} = -v$. Assim:

$$\begin{aligned} P' &= 0 + m'_2 u'_{2i} = -\gamma_v m_2 v = -\tfrac{4}{3} m_2 c = -\tfrac{4}{3} \tfrac{5}{9} m_0 c = -\tfrac{20}{27} m_0 c \\ E' &= \gamma(u'_{2i}) m_2 c^2 + m_0 c^2 = \left(\tfrac{5}{3} \tfrac{5}{9} + 1\right) m_0 c^2 = \tfrac{52}{27} m_0 c^2 \end{aligned}$$

Método 2 (E',P' depois da colisão)::

$$u'_F = \frac{u_F - v}{(1 - \frac{u_F v}{c^2})} = \frac{\frac{3c}{5} - \frac{4c}{5}}{(1 - \frac{12}{25})} = \frac{-1}{5} \frac{25}{13} c = -\frac{5c}{13}$$

Logo: $\gamma(u'_F) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}} = \frac{13}{12}$ e temos o momento e energia em S' dados por:

$P' = \gamma(u'_F)M_0u'_F = -\frac{80}{108}m_0c = -\frac{20}{27}m_0c$

$E' = \gamma(u'_F)M_0c^2 = \frac{52}{27}m_0c^2$.

(d) Nesse segundo referencial S', temos $u'_{2i} = -v_2$ e $u'_{1i} = \frac{u_{1i}-v_2}{\left(1-\frac{u_{1i}v_2}{c^2}\right)}$.

Como $u'_{1i} = -u'_{2i} = v_2$, temos

$$v_2 = \frac{u_{1i} - v_2}{\left(1 - \frac{u_{1i}v_2}{c^2}\right)} \Rightarrow 2v_2 - \frac{u_{1i}v_2^2}{c^2} - u_{1i} = 0$$

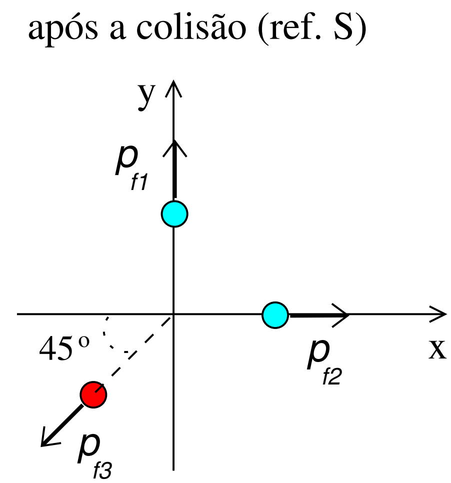
ou seja, uma Eq. de 2o grau para v_2. Sendo $u_{1i} = 4c/5$, temos:

$$\frac{4}{5}\left(\frac{v_2}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{v_2}{c}\right) + \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow \frac{v_2}{c} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{8/5} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

Escolhendo $v_2 < c$ temos $v_2 = c/2$.

Questão 4: Aniquilação em 3 fótons

Uma partícula e sua anti-partícula, ambas com massa de repouso m_0 tal que $m_0c^2 = 2.4$ MeV colidem, aniquilando-se mutuamente, e gerando 3 fótons (partículas de massa nula e energia $hf = hc/\lambda$, onde f é a frequência, λ o comprimento de onda da radiação, e h é a constante de Planck). A anti-partícula se desloca na direção y. A velocidade inicial da partícula em um dado referencial S é $v_i = 0.6c$ na direção x. Um dos fótons é emitido nesta mesma direção (no sentido positivo de x), outro na direção y (também no sentido positivo), ambos com mesmo comprimento de onda λ, e o terceiro fóton é emitido na diagonal (a 45 graus com relação ao eixo x), na direção do quadrante de x e y negativos (figura). Utilizando sempre o referencial S:



(a) [0,5] Calcule a energia (E_1) da partícula e seu momento linear (p_1).

(b) [0,5] Determine as componentes x e y do momento linear p_2 da anti-partícula e sua energia E_2.

(c) [0,5] Determine a energia total dos fótons emitidos.

(d) [0,5] Determine a energia de cada fóton.

(e) [0,5] Calcule a variação da energia cinética entre os estados inicial e final.

Dê suas respostas em unidades MeV e MeV/c, conforme o caso. Utilize $\sqrt{2} \approx 1.4$ para facilitar as contas.

Solução Q4:

a) O momento linear da partícula é $p_1 = m_0 v\gamma = m_o c^2 \frac{v}{c}\gamma/c = 2.4 * 0.6 * 1.25\text{MeV/c} = 1.8$ MeV/c

A energia é $E_1 = m_0c^2\gamma = 2.4 * 1.25 = 3$ MeV.

b) Sendo $\overrightarrow{P}$ o momento linear total do sistema, $p_{f1} = p_{f2} = \frac{hc}{\lambda}$ e p_{f3} o módulo do momento linear dos fótons 1, 2 e 3, temos, por conservação de momento linear: $P_x = p_1 = p_{1x} = p_{f1} - p_{f3}\frac{\sqrt{2}}{2} = p_{f2} - p_{f3}\frac{\sqrt{2}}{2} = P_y$ e portanto, $p_2 = p_{2y} = P_y = 1.8$ MeV/c e $E_2 = E_1 = 3$ MeV são o momento linear e a energia da anti-partícula, respectivamente.

c) Conservação de energia: $E_f = E_1 + E_2 = 2 * 3 = 6$ MeV.

d) $E_f = 2p_{f1}c + p_{f3}c = 6\text{MeV}$; do item b): $p_{f1} - p_{f3}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1.8\text{MeV/c}$ - 2 eqs. com 2 incógnitas - resolvendo para p_{f3} (multipl. segunda eq. por $2c$ e subtraindo da primeira): $p_{f3}c = 2.4/(1+\sqrt{2}) = 2.4/2.414 \approx 1.0$ MeV, e $p_{f1}c = p_{f2}c = (6 - p_{f3}c)/2 = 2.5$ MeV, são as energias dos fótons.

e) No estado final toda a energia ($K_f = E_f = 6$ MeV) é cinética, enquanto, no inicial: $K_i = 6 - 2 * 2.4 = 1.2$ MeV, a variação é $K_f - K_i = 4.8$ MeV (corresponde a $2m_0c^2$).