FEP2196 – Física para Engenharia II

Prova P2 - 14/10/2010

Nome: .... **Nº USP:** ....
Assinatura: .... **Turma/Professor:** ....

Observações:

- A prova tem duração de 2 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.
- Preencha todas as folhas, inclusive esta, com seu nome, número USP e turma, de forma legível.
- Resolva cada exercício começando na frente da folha com o mesmo número. Se necessário utilize o verso da folha.
- Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários. Não esqueça das unidades das grandezas físicas pedidas.
- Apresente sua identidade ao assinar a lista de presença.
- Quando nos resultados aparecer qualquer raiz que não seja de um quadrado perfeito, deixe indicado, sem necessidade de substituir por uma aproximação.

Formulário:

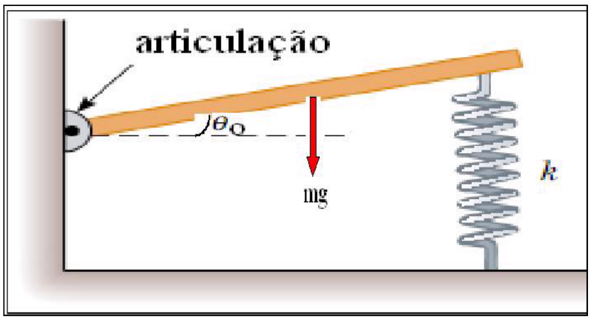
$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\cos(\omega_0 t + \varphi), \\
x(t) &= Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \\
x(t) &= Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(ae^{\beta t} + be^{-\beta t}\right); \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \\
x(t) &= Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt), \\
x(t) &= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos(\omega t + \varphi), \\
x(t) &= A_0\cos(\omega t + \varphi); \quad A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}; \quad tg\varphi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \\
Q &= \frac{A(\omega_0)}{A(0)}; \quad Q = \frac{\omega_0}{\gamma}; \quad \tau_d = \frac{1}{\gamma}; \\
I\frac{d^2\theta}{dt^2} &= \tau; \quad \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}
\end{aligned}
$$

1) Uma prancha horizontal de massa m e comprimento L está fixa por uma das extremidades enquanto que a outra extremidade está presa a uma mola de constante elástica k. A prancha é deslocada de um pequeno ângulo θ da posição horizontal de equilíbrio e após ser solta realiza oscilações em torno desta posição. Considere o ângulo de oscilação pequeno de forma que o arco descrito pela ponta da prancha possa ser aproximado por uma reta. Dado o momento de inércia $I = \frac{1}{3}mL^2$ da prancha com relação ao eixo de articulação como mostrado na figura abaixo.

(1,0) a) Obtenha a equação diferencial que descreve o movimento da prancha. Sugestão, calcule primeiramente o torque na condição de equilíbrio, notando que sobre a prancha atua a força peso e que a deformação da mola nesta condição é x_0.

(0,5) b) Determine o período da oscilação supondo que a massa da prancha é $3,00\ kg$ e a constante elástica da mola é $100\ N/m$.

(1,0) c) Obtenha a equação $\theta(t)$ que descreve o movimento de oscilação da prancha sabendo que no instante $t = 0$ a prancha é deslocada para cima até formar um ângulo $\theta_0 = \frac{\pi}{60} rad$ com a direção horizontal e abandonada a partir do repouso.



Solução:

a) Na condição de equilíbrio o torque total é igual a zero, ou seja:

$$mg\frac{L}{2} = kx_0L$$

onde x_0 é a deformação da mola na condição de equilíbrio. Fora do equilíbrio temos que:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\frac{L}{2} + kxL = -mg\frac{L}{2} + k(x_0 - \theta L)L = -k\theta L^2$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{kL^2}{I}\theta = -\omega^2\theta \text{ onde } \omega^2 = \frac{kL^2}{I}$$

b) Período $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{I/kL^2}$. Como o momento de inércia da prancha é de $mL^2/3$ temos que:

$$T = 2\pi\sqrt{I/kL^2} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{3kL^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{3.100}} = \frac{2\pi}{10}$$

c) A solução desta equação diferencial tem a forma:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -A\omega sen(\omega t + \varphi)$$

Para $t = 0$ temos que:

$$\frac{d\theta(0)}{dt} = 0 = -A\omega sen(\varphi) \Longrightarrow \varphi = 0$$
$$\theta(0) = \theta_0 = A\cos(\varphi) = A = \frac{\pi}{60}$$

Finalmente temos que:

$$\theta(t) = \frac{\pi}{60}\cos(10t)$$

2) Uma mola de constante elástica $k = 500\,N/m$ está presa ao teto de um elevador. Na outra extremidade da mola há um bloco de massa $2\,kg$. Para $t < 0\,s$, o elevador está subindo com aceleração constante $a_0 = 1/4\,g$ sem que o bloco oscile. A partir do instante $t = 0\,s$, o elevador passa a subir com velocidade constante e o bloco começa a oscilar.

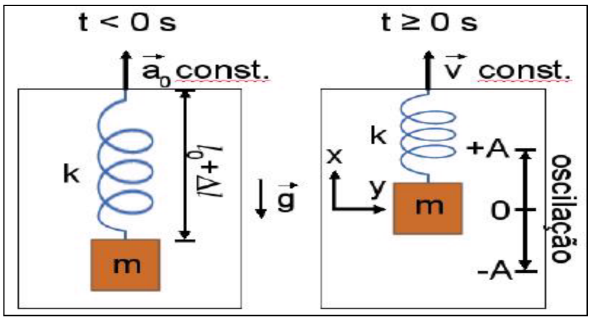
Considere a aceleração da gravidade $g = 10\,m/s^2$.

(0,5) a) Qual o alongamento Δl da mola, com relação ao seu comprimento natural l_0, durante o intervalo de tempo em que o elevador está subindo ($t < 0\,s$)?

Para $t \geq 0\,s$:
(1,0) b) Obtenha a equação diferencial que descreve o movimento do bloco e forneça sua solução geral. Adote o sistema de referência fixo no elevador com a coordenada x no eixo vertical, com sentido positivo para cima, como mostrado na figura. Considere $x = 0$ na posição de equilíbrio do sistema massa-mola.

(0,5) c) Qual a freqüência angular de oscilação?

(0,5) d) Qual o ângulo de fase inicial do movimento e a amplitude de oscilação?



Solução:

a) No sistema inercial em que o elevador tem aceleração a = 1/4 g, a força resultante F é dada por:

$$F = F_k - P \Rightarrow m\,a_0 = k\,\Delta l - m\,g \Rightarrow \Delta l = \frac{m(a_0+g)}{k} \Rightarrow \Delta l = 0,05\,m$$

b) A partir da equação da força resultante sobre o bloco, temos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

com $\omega_0^2 = k/m$.
A solução da equação diferencial acima é dada por:

$$x(t) = A\,cos(\omega_0 t + \varphi).$$

c) $\omega_0^2 = k/m \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{250}\, rad/s$

d) A oscilação se inicia com o máximo deslocamento $x(0) = -A$ de modo que o ângulo de fase inicial é $\varphi = \pm\pi$.

Em t = 0, a aceleração a é obtida de

$$m\,a = F_k(t=0) - P = F_k(t=0_-) - P = m\,a_0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}\,g, \tag{1}$$

e está relacionada à amplitude A por

$$a = -\omega_0^2 x = A\,\omega_0^2 \Rightarrow A = \frac{g}{4\omega_0^2} \Rightarrow A = 0,01\,m.$$

3) Na Figura **1** é mostrado um sistema massa-mola. Preso ao bloco tem-se um lapis. O bloco é empurado para esquerda, comprimindo a mola. Antes de o bloco ser solto, a partir do repouso, uma folha começa a passar perpendicular à mola, sob a ponta do lápis, com velocidade constante de 1 cm/s.

A Figura **2** mostra o traçado registrado pela ponta do lapis na superfície da folha. Sabendo-se que o conjunto bloco-lápis pesa 100 g e que a massa da mola é despresível, encontre:

Obs. Apresente as respostas utilizando as unidades cm, g, s, rad e quando necessário em função de ln.

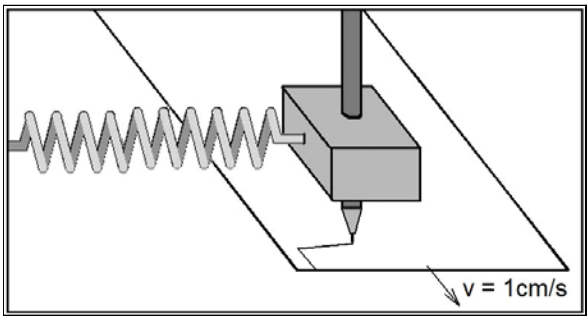


Figura 1

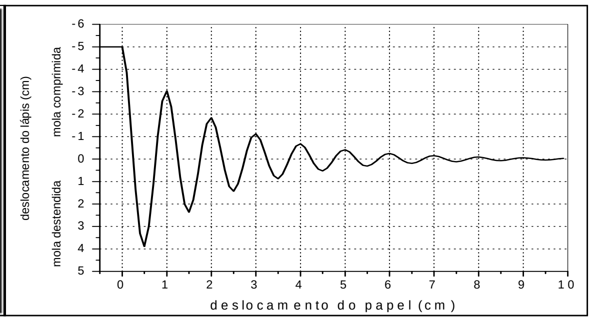


Figura 2

(0,5) a) a amplitude inicial.

(0,5) b) a fase inicial.

(0,5) c) a freqüência angular ω.

(0,5) d) considerando o primeiro período, calcule a constante de amortecimento ρ.

(0,5) e) escreva $x(t)$ (solução da equação diferencial que descreve o movimento).

Solução:

Como o bloco foi solto a partir do repouso com a mola comprimida temos:

a) Amplitude $A = 5cm$,

b) $x(0) = -5cm = 5cos(\varphi)cm$, logo: $\varphi = \pi$.

c) O intervalo de tempo entre duas posições da mola comprimida é de $1s$, assim:

$\omega = 2\pi s^{-1}$

d) Para o primeiro período, $t = 1s$, pode-se ler a partir do gráfico:

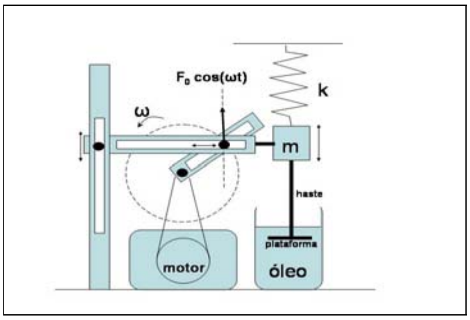
$x(1s) = -3cm = 5e^{-\gamma/2.1s}cos(2\pi s^{-1}.1s + \pi)\ cm$

$e^{\gamma/2} = 5/3, \gamma/2 = ln(5/3), \gamma = \ln(25/9)s^{-1}$, com $\gamma = \rho/m$, então, $\rho = 100\ln(25/9)g.s^{-1}$.

e) $x(t) = 5e^{-\ln(5/3)t}cos(2\pi t + \pi)$ cm.

Obs1: É possível encontrar uma solução bastante próxima da apresentada acima utilizando a condição de repouso ($v = 0$). Tal solução fornece os seguintes valores: $A = 5,02cm$; $\varphi = (\pi - 0,0813)rad$ e $x(t) = 5,02e^{-\ln(5/3)t}cos(2\pi t + \pi - 0,0813)$ cm.
Obs2: Ambas soluções serão consideradas corretas.

4) Observe a figura abaixo que representa um projeto de oscilador amortecido forçado. A barra horizontal transmite à massa $m = 3kg$ uma força vertical variável harmonicamente dada por $F = F_0 cos(\omega t)$. Uma mola de constante elástica $k = 27N/m$ realiza uma força restauradora sobre a massa. Uma plataforma solidária à massa e imersa num recipiente com óleo cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0,03kg/s$, promove uma força de arrasto proporcional à velocidade da massa. Assuma que o módulo máximo da força $F_0 = 2,7.10^{-2}N$ seja mantida constante durante o movimento, independentemente da amplitude da oscilação e da frequência ω (controlada pelo motor).



(0,5) a) Determine a freqüência de oscilação natural ω_0 e o fator de amortecimento γ para o oscilador.
Solução:

$$\omega_0 = \sqrt{27/3} = 3rad/s$$
$$\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{0,03}{3} = 10^{-2}s^{-1}$$

(0,5) b) Determine a freqüência aproximada em que ocorre a máxima amplitude de oscilação da massa m no regime estacionário.
Solução:
A amplitude é máxima quando:

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega} = \frac{F_0\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + \gamma^2\omega\right]}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + \gamma^2\omega^2\right]^{3/2}} = 0 \Longrightarrow \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + \gamma^2\omega\right] = 0$$
$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

Como $\gamma << \omega_0$, calculados no item a) temos aproximadamente:

$$\omega_{res} \simeq \omega_0 = 3rad/s$$

(0,5) c) Determine amplitude máxima de oscilação no regime estacionário.
Solução:
A amplitude máxima de oscilação ocorre na freqüência de ressonância, neste caso, $\omega_{res} = \omega_0$ conforme o item b).

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega_0^2\right) + \gamma^2\omega_0^2\right]^{1/2}} = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} = \frac{2,7.10^{-2}}{3.10^{-2}.3} = 0,3m$$

(1,0) d) Determine a fase do movimento para a oscilação com amplitude máxima e escreva a equação para a posição do oscilador em estado permanente de oscilação após o estado transitório.

Solução:

Considerando neste caso, $\omega_{res} \simeq \omega_0$. A fase para a amplitude máxima: $\varphi(\omega_0) = arctg\left[-\frac{\gamma\omega_0}{\left(\omega_0^2-\omega_0^2\right)}\right] = -\frac{\pi}{2}$

A equação:

$$x(t) = A(\omega_0)\cos\left[\omega_0 t + \varphi(\omega_0)\right]$$
$$x(t) = 0,3\cos\left[3t - \pi/2\right]$$