FEP2196 – Física para Engenharia II

Prova P1 - 2010

Observações:

- A prova tem duração de 2 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora e celular (manter desligado).
- Apresente sua identidade ao assinar a lista de presença.
- Preencha de forma legível todas as folhas de resposta com seu nome, número USP e número da turma
- Resolva cada exercício a partir da frente da folha com o mesmo número.
- Justifique todas as respostas com fórmulas, comentários (sucintos) e cálculos intermediários, não esquecendo das unidades das grandezas físicas.
- Caso apareça alguma raiz que não seja um quadrado perfeito, deixe indicado (não é necessário calcular o valor decimal).

Formulário

Transformação de Lorentz (configuração padrão):

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad t' = \gamma(t - \tfrac{v}{c^2}x) \qquad y' = y \qquad z' = z$$

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Velocidade relativa:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \qquad u'_y = \frac{1}{\gamma(v)}\frac{u_y}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}$$

Energia e momento relativísticos:

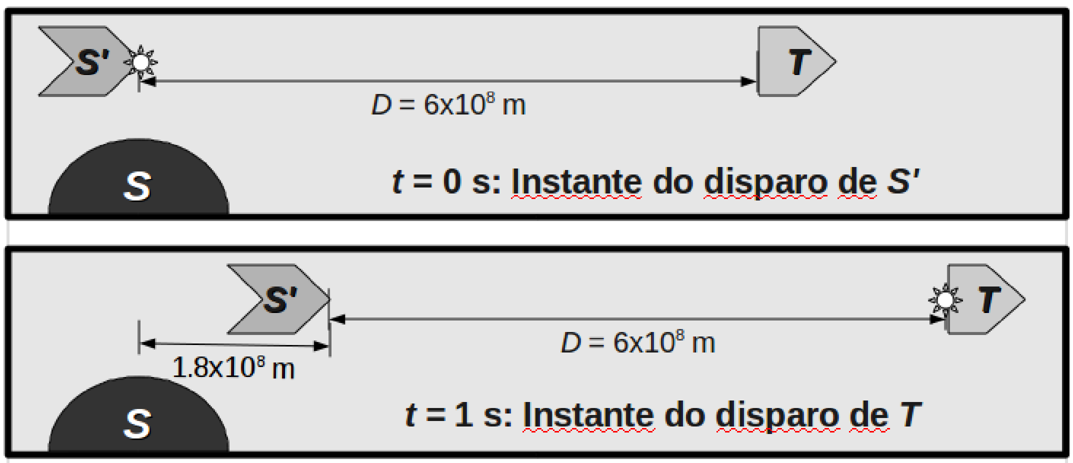
$$\vec{p} = \gamma(v)m_0\vec{v} \qquad E = \gamma(v)m_0c^2 \qquad E^2 = p^2c^2 + {m_0}^2c^4 \qquad E = K + m_0c^2$$

Considere a velocidade da luz como sendo $c = 3.0 \times 10^8$ m/s

---

Questão 1: Conflito interplanetário

Em um conflito interplanetário, duas naves T e S' destroem-se mutuamente com disparos de raios laser. Os *Sinceronianos* (honrados habitantes do planeta *Sinceron*, conhecidos por falar somente a verdade, mas que no entanto desconhecem a relatividade restrita) são chamados a testemunhar em defesa dos *Trapaceonianos* (povo da nave T) no Supremo Tribunal Universal e contra os *Esselinhas* (tripulantes da nave S'). No testemunho, os Sinceronianos afirmam que, de acordo com as observações feitas pelos astrônomos do seu planeta, ambas as naves viajavam à velocidade $v = 1,8 \times 10^8$m/s, na mesma direção e sentido, mantendo uma distância fixa de $D = 6 \times 10^8$ m entre elas, sendo que o disparo de S' ocorreu *1 segundo* antes do disparo de T (tendo sido cuidadosamente levados em conta os tempos de propagação dos sinais luminosos até o ponto de observação em S). Os advogados de T alegam portanto que o disparo da sua nave foi efetuado em legítima defesa. Suponha nas respostas que os pontos de localização das naves S' e T sejam co-lineares, sendo a direção da velocidade v orientada de S' para T, conforme a figura abaixo, apresentada pelos astrônomos Sinceronianos no Tribunal:



Determine, **no referencial de** S':

(a) [1,0] Adotando $t' = 0$ para o instante do disparo de S', qual foi o instante do disparo de T? De acordo com esse resultado os Esselinhas podem afirmar que dispararam *depois* dos Trapaceonianos?

Dos dados: $\frac{v}{c} = \frac{1.8\times10^8}{3.0\times10^8} = \frac{3}{5}$; $\gamma = \left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^{-1} = \left(\sqrt{\frac{25-9}{25}}\right)^{-1} = \frac{5}{4}$; $t = 1$s; $x = x_{0T} + vt = 6\times10^8 + 1.8\times10^8 = 7.8\times10^8$ m, e usando a Transf. de Lorentz: $t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)\frac{7.8\times10^8}{3\times10^8}\right) = \frac{5}{4}\frac{(-2.8)}{5} = -0.7$s, e o disparo de T antecede o de S'. Portanto, sim, no ref. S' os Esselinhas dispararam depois. (OBS: não se pode utilizar simplesmente dilatação temporal pois os disparos não ocorrem num mesmo ponto do espaço em nenhum dos dois referenciais, S e S')

(b) [0,5] Qual é a distância em metros mantida entre as naves T e S'?

É aplicável, nesse caso, a contração espacial:
$\Delta x' = \gamma\Delta x = \frac{5}{4}\times 6\times10^8 = 7.5\times10^8$m.

(c) [0,5] Quanto tempo depois do disparo feito pela nave S', esta foi atingida pelo disparo laser de T?

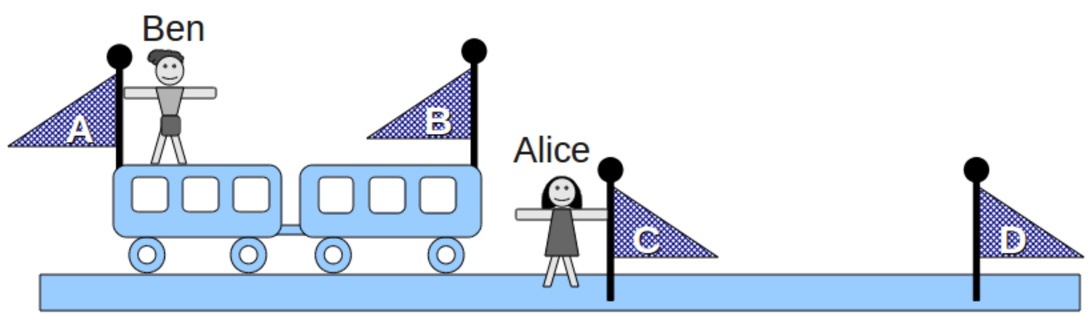
O pulso de laser viaja à vel. da luz em S', portanto $\Delta t' = \frac{\Delta x'}{c} = 2.5$ s foi o tempo que transcorreu desde o instante do disparo de T, até que este atingisse S', em $t'_2 = t' + \Delta t' = -0.7 + 2.5 = 1,8$ s. (Note que este é o valor procurado pois o relógio de S' conta o tempo a partir de seu próprio disparo).

(d) [0,5] Como juiz do tribunal, (e considerando os resultados anteriores) você poderia concluir que alguma das duas naves realmente poderia ter reagido em legítima defesa? Por que?

Não. A informação de que um disparo é feito não pode ser transmitida a uma velocidade superior à da luz. A informação da ocorrência do disparo de T chega a S' no instante $t' = 1.8$ s (juntamente com o pulso do disparo de laser). Tanto S' como T, que disparou antes (no mesmo referencial S'), dispararam sem ter conhecimento do disparo do oponente. Ambos são culpados.

Questão 2:

Ben se encontra na parte traseira de um vagão de trem onde também está localizada a bandeira A. Outra bandeira (B) se localiza na dianteira do trem. Ben mede o comprimento do trem como sendo L'. Por sua vez Alice se encontra parada na estação de trem, na mesma posição que a bandeira C. Alice observa o vagão passar por ela com velocidade c/2 na direção do eixo x e sentido positivo. Mais adiante na estação se encontra a bandeira D. Durante o movimento do trem, no referencial de Ben, a bandeira A do trem passa pela bandeira C na estação no mesmo instante que a bandeira B passa pela D.



(a) [1.0] Para Alice a bandeira B passa por D simultaneamente à bandeira C passando por A? Se sim, justifique o por quê desta coincidência. Se não, qual o intervalo de tempo entre A ter passado por C e B por D?

Não, para Alice os eventos não ocorrerão simultaneamente.

No referencial do trem (Ben): $L'_{CD} = x'_D - x'_c = L'$

No referencial da Terra (Alice): $L_{CD} = \gamma L'$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad L_{CD} = \frac{2L'}{\sqrt{3}}$$

Comprimento do trem: $\quad L_{trem} = \dfrac{L'}{\gamma} = \dfrac{\sqrt{3}L'}{2}$

Adotando $x = 0$ na posição C e t=0 quando A passar por C:

$\rightarrow$ neste instante B estará em $x = \dfrac{\sqrt{3}L'}{2}$

$\rightarrow \quad \Delta x$ a ser percorrido pelo trem até B passar por D:

$$\Delta x = L_{CD} - L_{trem} = \frac{L'}{2\sqrt{3}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{L'}{\sqrt{3}c}.$$

Depois que Ben passa pela bandeira D, ele passa a arremessar bolinhas de tenis com velocidade de 3c/4 no sentido negativo do eixo x para Alice, que as recebe na bandeira C. Ben arremessa uma bolinha por segundo.

(b) [0.5] Qual a velocidade das bolinhas medida por Alice?

No referencial do trem: $u'_x \; = \; -\dfrac{3c}{4}$

No referencial da Terra: $u_x \; = \; \dfrac{\frac{-3c}{4} + \frac{c}{2}}{1 + \frac{-3}{8}} \; = \; -\dfrac{2c}{5}$

(c) [1.0] Qual o intervalo de tempo entre o recebimento de cada bolinha, medido no referencial da Alice?

No referencial do trem: $\Delta t' \; = \; 1$ s

No referencial da Terra: $\Delta t_{\text{rec}} \; = \; \gamma \Delta t' \; + \; \Delta t_{\text{movimento trem entre 2 bolas}}$

$\Delta t_{\text{movimento trem entre 2 bolas}} \; = \; \dfrac{\text{distancia percorrida pelo trem}}{\text{velocidade bola}} \; = \; \dfrac{v\gamma \Delta t'_{trem}}{-u'_x}$

$\Delta t \; = \; \gamma \Delta t' \left(1 \; + \; \dfrac{v}{u_x}\right) \; = \; \dfrac{9}{2\sqrt{3}}$ segundos

Questão 3: Fissão do Urânio

A figura apresenta um processo típico de fissão de Urânio induzida por nêutrons. Um nêutron lento é absorvido pelo núcleo de ^{235}U, que em seguida fissiona produzindo como fragmentos os núcleos de ^{141}Ba e ^{92}Kr, e 3 nêutrons rápidos. Considere desprezível a energia cinética do nêutron lento incidente (tipicamente menor que 0.4 eV).

Dados: $m_0(^{235}\text{U})c^2 = 218.9$ GeV; $m_0(^{141}\text{Ba})c^2 = 131.3$ GeV; $m_0(^{92}\text{Kr})c^2 = 85.6$ GeV;
$m_0(n)c^2 = 0.9$ GeV.

(a) [0,5] Qual é a massa de repouso (em GeV/c^2) do núcleo composto formado pelo ^{235}U mais um nêutron?

Por conservação de energia, massa do núcleo composto (^{236}U) é $m_0\left(^{236}U\right) = m_0\left(^{236}U\right) + m_0(n) = 218.9 + 0.9 = 219.8\text{GeV/c}^2$.

(b) [0,5] Determine a energia cinética total dos produtos de fissão (neutrons rápidos e fragmentos), em MeV.

A mesma do núcleo composto menos a energia de repouso dos fragmentos:

$K = m_0\left(^{236}U\right) - m_0\left(^{141}Ba\right) - m_0\left(^{92}Kr\right) - 3m_0(n) = 219.8 - 131.3 - 85.6 - 2.7 = 0.2$ GeV.

(c) [0,5] Supondo também desprezíveis as energias cinéticas (e o momento linear) dos nêutrons rápidos (tipicamente 1 MeV cada), qual seria a razão entre os momentos lineares dos fragmentos^{141}Ba e ^{92}Kr?

Por conservação de momento linear (sendo inicialmente nulo), $\overrightarrow{p_1} \equiv \overrightarrow{p}\left(^{141}Ba\right) = -\overrightarrow{p}\left(^{92}Kr\right) \equiv -\overrightarrow{p_2}$, portanto: $\frac{p_1}{p_2} = 1$.

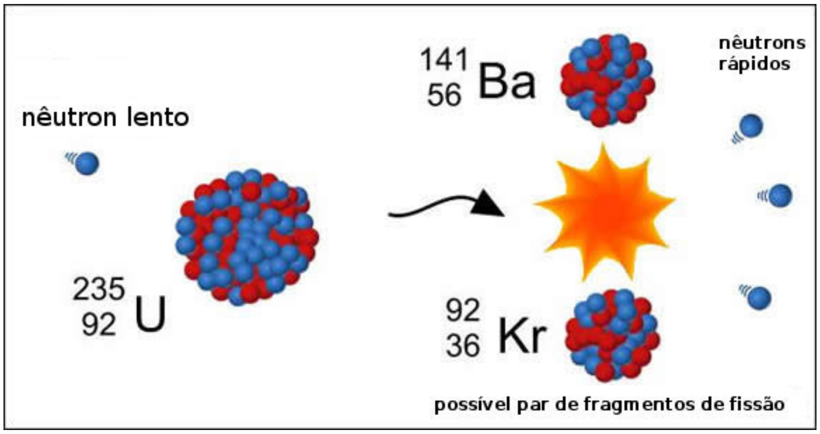
(d) [0,5] Estime a razão entre as velocidades dos fragmentos do item (c) no referencial do centro de massa, usando o limite não-relativístico.

Como $K = K_1 + K_2 \ll m_2c^2 < m_1c^2$, o sistema de fato encontra-se no regime não relativístico, isto é, tanto $v_1 \ll c$ como $v_2 \ll c$ (e portanto $p \approx mv$). Podemos dizer que as velocidades estão na razão inversa das massas: $\frac{v_2}{v_1} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{131.3}{85.6} \approx 1.5$.

(e) [0,5] Nesta mesma aproximação (mas sem esquecer da energia de repouso dos nêutrons rápidos) qual seria a energia total E_f do sistema ^{141}Ba + ^{92}Kr?

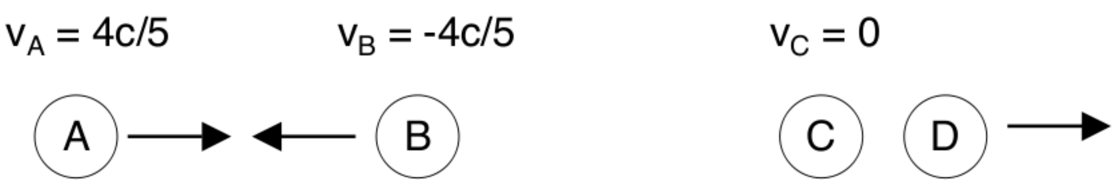
Conservação de energia: $E = E_1 + E_2 + m_0(n)c^2$

Portanto:$E_f = E_1 + E_2 = 219.8 - 2.7 = 217.1$ GeV



Questão 4: Colisão unidimensional

Considere uma colisão entre duas partículas, A e B, em que esta colisão resulta em duas partículas novas C e D como mostrado abaixo. A massa de repouso da partícula A é $6m_0$ enquanto a massa de repouso da partícula B é $3m_0$. No referencial do laboratório, de onde a colisão é observada, as partículas A e B viajam em direções opostas, mas com o mesmo módulo de velocidade $v = \frac{4}{5}c$. Depois da colisão a partícula C está em repouso para um observador no laboratório.



Se a massa de repouso da partícula C é $10m_0$, encontre no sistema de referência do laboratório:

(a) [0.5] O momento da partícula D.

Pela conservação de momento: $p_0 = p_f$

$$p_0 = m_A v_A + m_B v_B$$
$$\frac{6m_0}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}}\frac{4c}{5} - \frac{3m_0}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}}\frac{4c}{5} = p_D$$
$$p_D = 4m_0 c$$

(b) [0.5] A energia total da partícula D.

Pela conservação de energia: $E_0 = E_f$

$$m_A c^2 + m_B c^2 = m_c c^2 + E_D$$
$$E_D = 5m_0 c^2$$

(c) [0.5] A massa de repouso da partícula D.

$$E_D^2 = p_D^2 c^2 + m_0 c^4$$
$$M_{0D} = 3M_0$$

(d) [1.0] Se a massa de repouso da partícula C for $11m_0$, encontre a velocidade da partícula D.

se $M_{0C} = 11m_0 \quad \Rightarrow \quad E_D = 4m_0 c^2 = p_D c$

com isto $E_D = p_D c$ que implica que a partícula D tem massa nula e que portanto sua velocidade deve ser igual à da luz.