FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova P1 - 18/09/2008

Nome: .... **Nº USP:** ....

Assinatura: .... **Turma/Professor:** ....

Observações:

- A prova tem duração de 2 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.
- Preencha todas as folhas, inclusive esta, com seu nome, número USP e turma, de forma legível.
- Resolva cada exercício começando na frente da folha com o mesmo número. Se necessário utilize o verso da folha.
- Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários. Não esqueça das unidades das grandezas físicas pedidas.
- Apresente sua identidade ao assinar a lista de presença.
- Quando nos resultados aparecerem $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ou qualquer outra raiz que não seja de um quadrado perfeito, deixe indicado, sem substituir por uma aproximação. O mesmo aplica-se para $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$ ou qualquer outro ln.

$$x = r\,cos(\theta) \qquad y = r\,sen(\theta) \qquad \vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \qquad \text{ou} \qquad \vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{r} + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]\hat{\theta} \qquad \text{ou} \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\hat{e}_\theta$$

$$m\vec{a'} = \vec{F} + \vec{F}_{in} \qquad \vec{F}_c = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \qquad \vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \gamma = \frac{\rho}{m} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

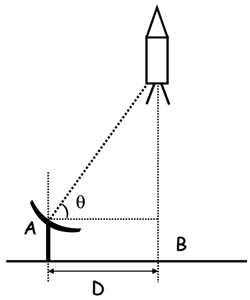
$$x(t) = a\,cos(\omega_0 t) + b\,sen(\omega_0 t) \qquad x(t) = A\,cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,cos(\omega t + \varphi)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)cos(b) \mp \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b) \qquad \mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}(a)\cos(b) \pm \mathrm{sen}(b)\cos(a)$$

$$\cos(a) = \mathrm{sen}(a + \pi/2) \qquad \mathrm{sen}30° = \cos 60° = \frac{1}{2} \qquad \mathrm{sen}60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{sen}45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

---

1. Um foguete é disparado verticalmente de uma plataforma de lançamento B. Seu vôo é rastreado por um radar situado no ponto A, a uma distância D=0,30 km da plataforma de lançamento, conforme figura abaixo. Supondo que $\dot{\theta} = 0,30$ (rad/s)



e utilizando o sistema de coordenadas polares, com pólo em A, determine:

   (a) (0,5) A magnitude da velocidade inicial do foguete, quando $\theta = 0°$.

   (b) (1,0) A magnitude da velocidade radial (v_r) quando $\theta = 30°$.

   (c) (1,0) A magnitude da aceleração tangencial (a_θ) quando $\theta = 30°$.

Solução:
Do formulário: $\vec{r} = r\,\hat{e}_r$ e $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$
Dados:
Quando t=0 $\Rightarrow r_0 = D = 0,30$ km (do desenho) e $\dot{\theta} = 0,30$ (rad/s)

   (a) (0,5) A magnitude da velocidade inicial do foguete, quando $\theta = 0°$.
   Para $\theta = 0°$ temos $\dot{r}_0 = \dot{D} = 0$
   Assim, para a velocidade teremos apenas:

$$\vec{v} = D\,\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{v} = 0,30 \times 10^3 \text{m} \times 0,30\,(\text{rad/s})$$

$$\vec{v} = 3 \times 10^2 \times 3 \times 10^{-1}\,(\text{m/s})$$

$$\vec{v} = 90\ (\text{m/s})\ \hat{e}_\theta$$

   (b) (1,0) A magnitude da velocidade radial (v_r) quando $\theta = 30°$.

$$r = \frac{D}{\cos\theta}$$

$$v_r = \dot{r} = -\frac{D}{\cos^2\theta} \times (-\text{sen}\,\theta) \times \dot{\theta}$$

$$v_r = \dot{r} = \frac{D\,\dot{\theta}\,\tan\theta}{\cos\theta}$$

$$v_r = \frac{0,30 \times 10^3\,(\text{m}) \times 0,30\,(\text{rad/s})\ \tan(\pi/6)}{\cos(\pi/6)}$$

$$v_r = 90 \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$v_r = 60\,(\text{m/s})$$

   (c) (1,0) A magnitude da aceleração tangencial (a_θ) quando $\theta = 30°$.
   Do formulário: $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$, com $\ddot{\theta} = 0$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} = 2 \times v_r \times \dot{\theta}$$

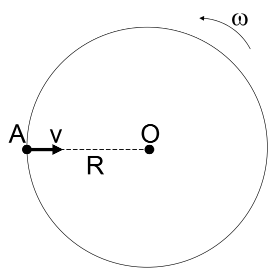
   Aqui podemos substituir v_r=60 (m/s) pois foi calculada no ítem anterior para o mesmo ângulo $\theta = 30°$.

$$a_\theta = 2 \times 60\,(\text{m/s}) \times 0,30\,(\text{rad/s})$$

$$a_\theta = 36(\text{m/s}^2)$$

---

2. Um carrinho motorizado está parado na borda de uma plataforma circular de raio R = 20 m, exatamente no ponto A, conforme a figura abaixo. A plataforma gira com velocidade $\vec{\omega} = 0,5\hat{k}$ (rad/s). Pretende-se que o carrinho ande o mais rápido possível, na direção radial, seguindo sobre a linha $\overline{\text{AO}}$ até o centro da plataforma.



   (a) (1,0) Considerando que, inicialmente, os pneus do carrinho estão travados, determine o coeficiente de atrito estático μ para que o carrinho fique parado no ponto A, com a plataforma girando.

(b) (1,0) Destravando-se os pneus do carrinho, determine a velocidade máxima v_{max} para que ele possa seguir sobre a linha radial $\overline{\text{AO}}$, sem derrapar lateralmente, considerando que o coeficiente de atrito estático seja o mesmo do item anterior.

(c) (0,5) O carrinho segue então com velocidade máxima e, ao encontrar-se exatamente na metade do trajeto até o centro, um dispositivo solta óleo na pista e o coeficiente de atrito cai à metade do valor inicial. Nestas condições determine o vetor aceleração do carrinho.

Solução:

(a) (1,0) Considerando que, inicialmente, os pneus do carrinho estão travados, determine o coeficiente de atrito estático μ para que o carrinho fique parado no ponto A, com a plataforma girando.
Do formulário:

$$\vec{f_c} = -m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})$$

Aqui, a posição inicial do carrinho (A) é: $\vec{r'} = R\,\hat{e}_{r'}$

$$\vec{f_c} = -m\omega(\hat{k}') \times [\omega(\hat{k}') \times R(\hat{e}_{r'})]$$

$$\vec{f_c} = -m\omega(\hat{k}') \times (\omega R)\,\underbrace{(\hat{k}' \times \hat{e}_{r'})}$$

$$\vec{f_c} = -m\omega^2 R\,\underbrace{(\hat{k}' \times \hat{e}_{\theta'})}$$

$$\vec{f_c} = -m\omega^2 R(-\hat{e}_{r'})$$

$$\vec{f_c} = \omega^2 R\ \hat{e}_{r'} \quad \text{(para fora)}$$

No equilíbrio:

$$f_{at} = f_c$$

$$\mu\, m\, g = m\,\omega^2\, R$$

$$\mu = \frac{\omega^2 R}{g}$$

$$\mu = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 (\text{rad/s})^2 \times 20(\text{m})}{10\,\text{m/s}^2}$$

$$\mu = 0,5$$

(b) (1,0) Destravando-se os pneus do carrinho, determine a velocidade máxima v_{max} para que ele possa seguir sobre a linha radial $\overline{\text{AO}}$, sem derrapar lateralmente, considerando que o coeficiente de atrito estático seja o mesmo do item anterior.
Do formulário: $\vec{f}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$

$$\vec{f}_{cor} = 2\,m\,\omega\,v'\ \hat{e}_{\theta'}$$

No equilíbrio: $f_{at} = f_{cor}$

$$\mu\, m\, g = 2\, m\,\omega\, v'$$

$$v' = \frac{\mu\, g}{2\,\omega} = \left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)\frac{g}{2\,\omega}$$

$$v' = \frac{\omega\, R}{2}$$

$$v' = \frac{1}{2}(\text{rad/s}) \times 20\text{m} \times \frac{1}{2}$$

$$v' = 5,0\,(\text{m/s})$$

(c) (0,5) O carrinho segue então com velocidade máxima e, ao encontrar-se exatamente na metade do trajeto até o centro, um dispositivo solta óleo na pista e o coeficiente de atrito cai à metade do valor inicial. Nestas condições determine o vetor aceleração do carrinho.
O coeficiente de atrito atual μ' cai pela metade do anterior:

$$\mu' = \mu/2 = (\omega^2 R/g) \times (1/2)$$

Porém, o raio também cai pela metade. A resultante radial continua nula.

$$f'_c - f'_{at} = m\, a_{r'}$$

$$m\,\omega^2\left(\frac{R}{2}\right) - \left(\frac{\mu}{2}\right)\, m\, g = m\, a_{r'}$$

$$m\,\omega^2\left(\frac{R}{2}\right) - \left(\frac{\omega^2 R}{2g}\right)\, m\, g = m\, a_{r'}$$

$$a_{r'} = 0\,(\text{m/s}^2)$$

Na direção tangencial a força de atrito cai pela metade:

$$f_{cor} - f'_{at} = m\, a_{\theta'}$$

$$2\, m\,\omega\, v' - \left(\frac{\mu}{2}\right)\, m\, g = m\, a_{\theta'}$$

$$a_{\theta'} = 2\,\omega\,\left(\frac{\omega\, R}{2}\right) - \left(\frac{\omega^2 R}{2g}\right) g$$

$$a_{\theta'} = \frac{\omega^2 R}{2}$$

$$a_{\theta'} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 20(\mathrm{m}) \times \frac{1}{2} = 2,5\,(\mathrm{m/s^2})$$

$$\vec{a} = 2,5\,(\mathrm{m/s^2})\,\hat{e}_{\theta'}$$

---

3. Um corpo de massa $m = 3,0$ kg preso a uma mola realiza um movimento harmônico simples de acordo com a equação horária:

$$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos(2t) - \mathrm{sen}(2t)\right](m)$$

Nestas condições determine:

(a) (0,5) O período de oscilação do corpo.

(b) (1,0) A amplitude e a fase inicial do movimento.

(c) (1,0) A energia potencial máxima armazenada na mola.

Solução:

(a) (0,5) O período de oscilação do corpo.

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{e} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Da equação: $\omega_0 = 2\,(rad/s)$

$$T = \frac{2\pi}{2\,(rad/s)}$$

$$T = \pi\,(s)$$

(b) (1,0) A amplitude e a fase inicial do movimento.

Do formulário:

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Da equação:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1\,(m)$$

$$\phi = \arctan(1)$$

$\phi = (\pi/4 + \mathrm{n}\pi)\,(\mathrm{rad})$, com n inteiro.

então,

$$x(t) = \cos(\omega t + \pi/4)\,(\mathrm{m})$$

ou

$$x(t) = \mathrm{sen}(\omega t + 3\pi/4)\,(\mathrm{m})$$

(c) (1,0) A energia potencial máxima armazenada na mola:

$$E_0 = \frac{1}{2} m\, w_0^2\, A^2$$

$$E_0 = \frac{1}{2} 3,0(kg)\,(2\,\mathrm{rad/s})^2 \times 1\,(m)$$

$$E_0 = 6,0\,(J)$$

---

4. Um corpo preso na extremidade de uma mola e imerso em um fluido viscoso, executa um movimento harmônico amortecido no regime subcrítico conforme a equação horária:

$$x(t) = 4e^{-3t}\cos(4t + \phi)(\mathrm{m})$$

Sabendo-se que o corpo possui velocidade nula no instante de tempo t=0, determine:

(a) (1,0) A freqüência natural de oscilação ω_0 (freqüência na ausência da força viscosa) do sistema massa-mola.

(b) (1,0) A fase inicial ϕ do movimento .

(c) (0,5) O tempo necessário para que a amplitude máxima do movimento se reduza à metade do valor inicial.

Solução:

(a) (1,0) A freqüência natural de oscilação ω_0 (freqüência na ausência da força viscosa) do sistema massa-mola.

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,0\,(rad/s)$$

(b) (1,0) A fase inicial ϕ do movimento .
Para t=0s, $v(0) = \dot{x}(0) = 0$

$$\dot{x}(t) = -12e^{-3t}\,\cos(4t{+}\phi){-}16\,e^{-3t}\,\mathrm{sen}(4t{+}\phi)\,(\mathrm{m})$$

$$0 = \dot{x}(0) = -12\,\cos(\phi) - 16\,\mathrm{sen}(\phi)\,(\mathrm{m})$$
$$\frac{-12}{16} = \tan(\phi) \Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{-3}{4}\right)$$

(c) (0,5) O tempo necessário para que a amplitude máxima do movimento se reduza à metade do valor inicial.

$$\frac{1}{2} = e^{-3t}$$
$$-\ln(2) = -3t$$
$$t = \frac{\ln(2)}{3}(\mathrm{s})$$