FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova Substitutiva - 11/12/2008

Nome: .... **Nº USP:** ....
Assinatura: .... **Turma/Professor:** ....

Observações:

- A prova tem duração de 2 horas.
- Não é permitido o uso de calculadora.
- Preencha todas as folhas, inclusive esta, com seu nome, número USP e turma, de forma legível.
- Resolva cada exercício começando na frente da folha com o mesmo número. Se necessário utilize o verso da folha.
- Justifique todas as suas respostas com comentários, fórmulas e cálculos intermediários. Não esqueça das unidades das grandezas físicas pedidas.
- Apresente sua identidade ao assinar a lista de presença.
- Quando nos resultados aparecer qualquer raiz que não seja de um quadrado perfeito, deixe indicado, sem necessidade de substituir por uma aproximação. Se necesssário utilize $g = 10\ m/s^2$ e $c = 3\text{x}10^8\ m/s$

$m\vec{a'} = \vec{F} + \vec{F}_{in} \qquad \vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) \qquad \vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v'} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$x(t) = a\,sen(\omega t) + b\,cos(\omega t) \qquad x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \gamma = \frac{\rho}{m}$

$x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \qquad x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(a\,e^{\beta t} + b\,e^{-\beta t}\right) \qquad \beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$

$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\,cos(\Omega t) \qquad x(t) = A(\Omega)\,cos[\Omega t + \varphi(\Omega)]$

$A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+\gamma^2\Omega^2}} \qquad \varphi(\Omega) = -arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right) \qquad Q = \frac{\omega_0}{\gamma} \qquad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$

$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta) \qquad \omega = kv \qquad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad I = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2 \qquad k_n = n\frac{\pi}{L}$

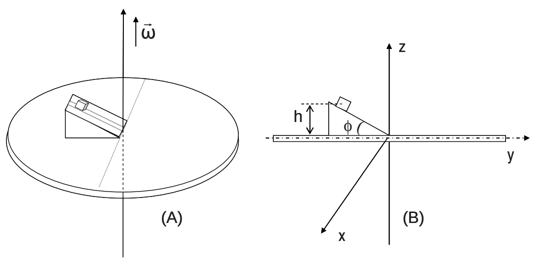
$\nu = \nu_0\frac{\left(1 \pm \frac{u}{v_s}\right)}{\left(1 \mp \frac{V}{v_s}\right)} \qquad \nu = \frac{\nu_0}{\left[1 - \frac{V\,cos(\theta)}{v_s}\right]} \qquad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Delta t = \gamma(v)\Delta t_0 \qquad L = \frac{L_0}{\gamma(v)} \qquad t' = \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$

$x' = \gamma(v)(x - vt) \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(v)\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}$

$\vec{p} = \gamma(v)m_0\vec{v} \qquad E = K + m_0c^2 = \gamma(v)m_0c^2 \qquad E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$

---

1. Uma cunha triangular, de inclinação ϕ, é fixada sobre a tampa giratória de uma mesa, de tal modo que a extremidade da cunha coincide com a linha que passa pelo centro da mesa (A). A superfície da cunha possui um canalete e, no interior do mesmo, um bloco de massa $m = 0,50\ kg$ pode deslizar sem atrito. Observa-se que, quando a tampa gira com velocidade angular $\vec{\omega} = 5,0\vec{k}\ rad/s$, o bloco permanece em equilíbrio sobre a cunha, estando a uma altura $h = 0,40\ m$, em relação ao nível da tampa giratória (B) (veja figura).



(a) (1,0) Determine o ângulo ϕ de inclinação da cunha.

Soma das forças na direção do plano da cunha:

$$F_{cfg}\cos\phi = P\text{sen}\phi$$

$$\tan\phi = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

e também,

$$\tan\phi = \frac{h}{r}$$

$$\frac{\omega^2 r}{g} = \frac{h}{r}$$

$$r = \frac{1}{\omega}\sqrt{gh} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{4}{10}\times 10} = \frac{2}{5} = 0,4 = h$$

$$\text{Assim} : \tan\phi = \frac{h}{r} = 1 \Longrightarrow \phi = 45°$$

(b) (1,0) Para um observador fixo na tampa giratória, determine a magnitude, direção e o sentido da força centrífuga que atua sobre o bloco.

$$\vec{F}_{cfg} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{F}_{cfg} = (m\omega^2 r)\hat{r}$$

$$\vec{F}_{cfg} = \left(\frac{1}{2}\times 5^2\times\frac{2}{5}\right)\hat{r}$$

$$\vec{F}_{cfg} = 5,0(N)\hat{r}$$

(c) (0,5) Suponha agora que, em um dado instante de tempo, o bloco é puxado por uma força externa, iniciando um movimento de descida, com velocidade de magnitude constante $v' = 4,0\ m/s$, ao longo da cunha. Qual é, nesse caso, a magnitude, da força de Coriolis?

$$\vec{F}_{cor} = -2m(\vec{\omega}\times\vec{v'})$$

$$\vec{F}_{cor} = 2m\omega(v'\text{sen}\phi)\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{cor} = 2\times\frac{1}{2}\times 5\times 4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{cor} = 10\sqrt{2}(N)\hat{\theta}$$

2. Um bloco de massa $m = 0,20\ kg$, apoiado sobre uma mesa horizontal sem atrito, está ligado a extremidade de uma mola de constante $k = 80\ N/m$. Aplica-se sobre o bloco uma força externa $F_0 cos(\Omega t)$ na direção horizontal, com $\Omega = 30\ rad/s$. A força de resistência viscosa do ar pode ser desprezada.

(a) (0,5) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}cos(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 80\times\frac{10}{2}x = \frac{10}{2}F_0 cos(30t)$$

$$\ddot{x} + 400\,x = 5\,F_0 cos(30t)$$

(b) (1,0) Determine a solução geral da equação diferencial do item (a) para $F_0 = 0$, com as condições iniciais $x(0) = 2,0\ m$ e $v(0) = 0$.

Equação diferencial: $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

$$\ddot{x} = -400x$$

Freqüência natural:

$$\omega_0^2 = 400 \Longrightarrow \omega_0 = 20(rad/s)$$

Solução geral:

$$x(t) = Acos(20t + \varphi)$$

$$C.I.1:\quad 2,0 = A\,cos(\varphi)$$

$$C.I.2:\quad 0 = -20A\,sen(\varphi)$$

$$De\ C.I.2 : \varphi = 0(rad)\quad\text{ou}\quad\varphi = \pi(rad)$$

$$De\ C.I.1 :\Longrightarrow A = 2,0\quad\text{para}\quad\varphi = 0(rad)$$

$$x(t) = 2,0cos(20t)$$

ou

$$A = -2,0\quad\text{para}\quad\varphi = \pi(rad)$$

$$x(t) = -2,0cos(20t + \pi)$$

(c) (1,0) Determine a solução geral da equação diferencial do item (a) para $F_0 = 2,0\ N$, com as condições iniciais $x(0) = 0$ e $v(0) = 0$.

Equação diferencial:

$$\ddot{x} + 400x = 10cos(30t)$$

Solução geral:

$$x(t) = Bcos(\omega_0 t + \phi) + A(\Omega)cos(\Omega t + \varphi(\Omega))$$

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$$

Amortecimento desprezado: $\gamma = 0$

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

$$A(\Omega) = \frac{2,0}{2} \times 10\left(\frac{1}{20^2 - 30^2}\right)$$

$$A(\Omega) = -\frac{1}{50} = -0,02\,(m)$$

Fase: $\varphi(\Omega) = -arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$

Como $\gamma = 0$:

$$\varphi(\Omega) = -arctan\left(\frac{0 \times 30}{20^2 - 30^2}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi(\Omega) = 0\,(rad)$$

$$C.I.1: \quad x(0) = 0$$

$$B\,cos(\phi) + A(\Omega)cos(\varphi(\Omega)) = 0$$

Sendo, $\varphi(\Omega) = 0$, teremos $cos(\varphi(\Omega)) = 1$

Então:

$$B\,cos(\phi) + A(\Omega) = 0$$

Equação 1: $\quad B\,cos(\phi) - 0,02 = 0$

$$C.I.2: \quad v(0) = 0 \Rightarrow \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=0} = 0$$

$$-B\omega_0\,sen(\phi) - \Omega A(\Omega)sen(\varphi(\Omega)) = 0$$

$$\varphi(\Omega) = 0 \Rightarrow sen(\varphi(\Omega)) = 0$$

$$-B\omega_0\,sen(\phi) = 0 \Rightarrow sen(\phi) = 0 \Rightarrow \phi = 0\,(rad)$$

Da equação 1:

$$B\,cos(0) - 0,02 = 0$$

$$B = 0,02\,(m)$$

Solução Geral:

$$x(t) = 0,02\,cos(20t) - 0,02\,cos(30t)$$

3. Uma onda harmônica transversal se propaga na água a partir da borda de uma piscina retagular muito longa, segundo a equação: $y(x,t) = Asen(kx - \omega t)$. A onda se origina num dos extremos da piscina e 10 segundos depois ela atinge uma bóia que se encontra à 10 metros da borda. Como resultado do processo, a bóia passa a oscilar com período $T = 0,50\ s$ e amplitude $A = 0,05\ m$.

   (a) (1,0) Determine o número de onda k e a frequência angular ω da onda.

   Solução:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \times 2 = 4\pi\,(rad/s)$$

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10}{10} = 1,0(m/s)$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{4\pi(rad/s)}{1,0(m/s)}$$

$$k = 4\pi\,(rad/m)$$

   (b) (0,5) Calcule a velocidade máxima da bóia na oscilação.

   Solução:

$$v = \frac{dy}{dt} = -A\omega cos(kx - \omega t)$$

$$v_{max} \Rightarrow cos(kx - \omega t) = 1$$

$$|v_{max}| = A\omega = 0,05\,(m) \times 4\pi\,(rad/s)$$

$$|v_{max}| = 0,20\pi\,(m/s)$$

   (c) (1,0) Finalmente, a onda se superpõe com uma onda idêntica, enviada em sentido contrário, à partir da borda oposta da piscina, estabelecendo-se uma onda estacionária. Nessas condições, qual será a amplitude máxima de oscilação da onda e a amplitude de oscilação da bóia?

   Solução:

   Onda indo:

$$y_1 = Asen(kx - \omega t)$$

   e, onda retornando:

$$y_2 = Asen(kx + \omega t)$$

   Onda estacionária:

$$y = y_1 + y_2$$

$$y(x,t) = A[sen(kx)cos(\omega t) - sen(\omega t)cos(kx)] +$$

$$+A[sen(kx)cos(\omega t) + sen(\omega t)cos(kx)]$$

$$y(x,t) = 2A\,sen(kx)cos(\omega t)$$

A amplitude máxima da onda estacionária será $A_{max} = 2A$.

$$A_{max} = 2 \times 0,05\,(m)$$

$$A_{max} = 0,10\,(m)$$

Para a bóia, a amplitude de oscilação será quando $cos(\omega t) = 1$, na posição da bóia.

Na posição da bóia, em $x = 10\,m$, a onda estacionária $y(x,t) = 2A\,sen(kx)cos(\omega t)$ oscilará com a amplitude $2A\,sen(kx)$:

$$A_{bóia} = 2A\,sen(kx)$$

$$A_{bóia} = 2 \times 0,05 \times sen(4\pi \times 10)$$

$$sen(40\pi) = 0 \Rightarrow A_{bóia} = 0(m)$$

Portanto, a bóia fica parada. Não oscila porque está localizada em um nó da onda estacionária.

4. Considere dois referenciais, S e S', com origens em O e O'. O referencial S' move-se com velocidade $\vec{v} = \frac{4}{5}c\vec{i}$, em relação à S.

   (a) (1,0) Se um foguete é lançado de S com velocidade $\vec{u} = (\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j})c$ qual é a velocidade $\vec{u}'$ do foguete para um observador em repouso no referencial S'?

   Solução:

   Cálculo de u'_x:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{(1 - \frac{vu_x}{c^2})}$$

$$u'_x = \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{5}\right)c}{\left(1 - \frac{\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\right)c^2}{c^2}\right)}$$

$$u'_x = \frac{\left(\frac{5}{10} - \frac{8}{10}\right)c}{\left(\frac{10}{10} - \frac{4}{10}\right)} = \frac{-\frac{3}{10}c}{\frac{6}{10}} = -\frac{1}{2}c$$

   Cálculo de γ para $v = \frac{4}{5}c = \frac{8}{10}c$

$$\gamma(v) = \sqrt{\frac{100}{36}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

   Cálculo de u'_y:

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(v)\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

$$u'_y = \frac{\frac{2}{5}c}{\frac{5}{3}\left(1 - \frac{\left(\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\right)c^2}{c^2}\right)} = \frac{\frac{2}{5}c}{\frac{5}{3}\times\frac{6}{10}} = \frac{2}{5}c$$

   Portanto:

$$\vec{u'} = \left(-\frac{1}{2}\hat{\imath} + \frac{2}{5}\hat{\jmath}\right)c$$

   (b) (1,0) Suponha que dois pulsos de luz sejam enviados simultaneamente em S, dos pontos $x_1 = 600\ m$ e $x_2 = 800\ m$, na direção de um detetor localizado na origem O. Quais os intervalos de tempo entre as deteções dos pulsos de luz em O, medidos por observadores nos sistemas S e S'?

   Solução:

   Em S:

$$t_1 = \frac{x_1}{c} = \frac{6\times10^2}{3\times10^8} = 2\times10^{-6}s$$

$$t_2 = \frac{x_2}{c} = \frac{8\times10^2}{3\times10^8} = \frac{8}{3}\times10^{-6}s$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \left(\frac{8}{3} - \frac{6}{3}\right)\times10^{-6}s$$

$$\Delta t = \frac{2}{3}\times10^{-6}s$$

   Em S':

$$\Delta t' = \gamma\Delta t$$

$$\Delta t' = \frac{5}{3}\times\frac{2}{3}\times10^{-6}s$$

$$\Delta t' = \frac{10}{9}\times10^{-6}s$$

   ou

$$\Delta t' = \frac{1}{9}\times10^{-5}s$$

   (c) (0,5) Suponha agora que uma uma partícula de massa $M_0 = 1,0\ GeV/c^2$ move-se em S, com velocidade $\vec{v} = \frac{3}{5}c\vec{i}$. Determine a energia e o momento linear relativístico da partícula, em relação ao referencial S.

   Solução:

   Cálculo de γ para $v = \frac{3}{5}c = \frac{6}{10}c$:

$$\gamma(v) = \sqrt{\frac{100}{64}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

   Cálculo da energia em S:

$$E = \gamma(v)M_0c^2 = \frac{5}{4}\times1,0\ \frac{GeV}{c^2}\times c^2$$

$$E = 1,25\ GeV$$

   Cálculo do momento linear em S:

$$\vec{p} = \gamma(v)M_0\vec{v}$$

$$\vec{p} = \frac{5}{4}\times1,0\ \frac{GeV}{c^2}\times\frac{3}{5}c\hat{\imath}$$

$$\vec{p} = \frac{3}{4}\hat{\imath}\left(\frac{GeV}{c}\right)$$

$$\vec{p} = 0,75\hat{\imath}\ \left(\frac{GeV}{c}\right)$$