FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova Substitutiva - 13/12/2007 - Gabarito

1. Uma formiga de massa $m = 0,10\ g$ encontra-se sobre um disco de raio $R = 20\ cm$, que gira em sentido anti-horário com velocidade angular $\vec{\omega} = 3,0\ \hat{k}\ rad/s$. Utilizando o sistema de coordenadas cilíndricas, determine a força de inércia, $\vec{F}_{in}$, medida em Newtons, que atua sobre a formiga, quando ela:

   (a) (0,5) Está parada a uma distância $\frac{R}{2}$ do centro do disco.

   (b) (1,0) Está a uma distância $\frac{R}{2}$ do centro, mas agora com velocidade $\vec{v} = 20\ \hat{\theta}\ cm/s$ em relação ao disco.

   (c) (1,0) Está a uma distância $\frac{R}{2}$ do centro, mas agora com velocidade $\vec{v} = -10\ \hat{r}\ cm/s$ em relação ao disco.

   SOLUÇÃO

   Dados iniciais do problema:

   massa $m = 0,10\ g = 1 \times 10^{-4}\ kg$

   Raio do disco $R = 20\ cm = 0,2\ m$

   Velocidadde angular $\vec{\omega} = 3,0\ \hat{k}\ rad/s$

   A força de inércia $\vec{F}_{in}$ é dada pela força centrífuga e pela força de Coriolis:

$$\vec{F}_{in} = \vec{F}_{cent} + \vec{F}_{Cor} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

   Para cada caso teremos:

   (a) Está parada a uma distância $\frac{R}{2}$ do centro do disco.

$$\vec{r'} = 0,1\ \hat{r}\ m$$

$$\vec{v'} = 0$$

$$\vec{\omega} = 3,0\ \hat{k}\ rad/s$$

   Nesse caso a força de inércia só possui a componente centrífuga

$$\vec{F}_{in} = -1 \times 10^{-4} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 0,1 \left[\hat{k} \times (\hat{k} \times \hat{r})\right]$$

$$\boxed{\vec{F}_{in} = 9 \times 10^{-5}\ \hat{r}\ N}$$

(b) Está a uma distância $\frac{R}{2}$ do centro, mas agora com velocidade $\vec{v} = 20\ \hat{\theta}\ cm/s$ em relação ao disco.

$$\vec{r'} = 0,1\ \hat{r}\ m$$

$$\vec{v'} = 0,2\ \hat{\theta}\ m/s$$

$$\vec{\omega} = 3,0\ \hat{k}\ rad/s$$

A componente centrífuga da força de inércia permanece a mesma e a componente de Coriolis será dada por:

$$\vec{F}_{Cor} = -2 \cdot 1 \times 10^{-4} \cdot 3 \cdot 0,2 \left[\hat{k} \times \hat{\theta}\right] = 1,2 \times 10^{-4}\ \hat{r}\ N$$

Portanto, a força de inércia será:

$$\vec{F}_{in} = (9 \times 10^{-5}\ \hat{r} + 1,2 \times 10^{-4}\ \hat{r})\ N$$

$$\boxed{\vec{F}_{in} = 2,1 \times 10^{-4}\ \hat{r}\ N}$$

(c) Está a uma distância $\frac{R}{2}$ do centro, mas agora com velocidade $\vec{v} = -10\ \hat{r}\ cm/s$ em relação ao disco.

$$\vec{r'} = 0,1\ \hat{r}\ m$$

$$\vec{v'} = -0,1\ \hat{r}\ m/s$$

$$\vec{\omega} = 3,0\ \hat{k}\ rad/s$$

A componente centrífuga da força de inércia permanece a mesma e a componente de Coriolis será dada por:

$$\vec{F}_{Cor} = -2 \cdot 1 \times 10^{-4} \cdot 3 \cdot (-0,1) \left[\hat{k} \times \hat{r}\right] = 6 \times 10^{-5}\ \hat{\theta}\ N$$

Portanto, a força de inércia será:

$$\vec{F}_{in} = (9 \times 10^{-5}\ \hat{r} + 6 \times 10^{-5}\ \hat{\theta})\ N$$

$$\boxed{\vec{F}_{in} = (9\ \hat{r} + 6\ \hat{\theta}) \times 10^{-5}\ N}$$

2. Um corpo de massa 40 g está preso a uma mola de constante elástica $K = 100\ N/m$. Este sistema é colocado para oscilar e depois imerso num meio cujo coeficiente de atrito viscoso é $\rho = 0,08\ kg/s$. Para que o sistema não pare de oscilar, uma força externa $F = F_0\ cos(\Omega t)$ é aplicada, onde $F_0 = 0,32\ N$ e $\Omega = 50\ rad/s$. Nestas condições o sistema é mantido num regime estacionário.

   (a) (0,5) Determine a freqüência natural do sistema.

   (b) (0,5) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes (indicando suas unidades).

   (c) (0,5) Em que instantes de tempo a elongação do movimento é máxima em módulo?

   Se subitamente a força externa fosse desligada, num instante em que a elongação é máxima:

   (d) (0,5) Qual seria o novo regime de oscilação? (justifique)

   (e) (0,5) Qual seria a frequência de oscilação?

SOLUÇÃO

(a) Determine a freqüência natural do sistema.

Sistema massa-mola, onde a freqüência natural é dada por:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{0,04}} = \sqrt{2500}$$

$$\boxed{\omega_0 = 50\ rad/s}$$

(b) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento, explicitando os valores numéricos dos coeficientes (indicando suas unidades).

Temos um oscilador harmônico amortecido e forçado, cuja equação que descreve o movimento é dada por:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \rho\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \; cos(\Omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \; cos(\Omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \; cos(\Omega t)$$

Utilizando os valores dados temos:

$$\gamma = \frac{\rho}{m} = \frac{0,08}{0,04} = 2 \; s^{-1}$$

$$\omega_0^2 = 2500 \; rad^2/s^2$$

$$\frac{F_0}{m} = \frac{0,32}{0,04} = 8 \; m/s^2$$

$$\Omega = 50 \; rad/s$$

Assim, a equação diferencial que descreve o movimento será dada por:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2500x = 8 \; cos(50t)}$$

(c) Em que instantes de tempo a elongação do movimento é máxima em módulo?

A elongação do movimento é dada por:

$$x(t) = A(\Omega) \, cos[\Omega t + \varphi(\Omega)]$$

Para que a elongação seja máxima em módulo temos que:

$$cos[\Omega t + \varphi(\Omega)] = \pm 1$$

ou seja,

$$\Omega t_{MAX} + \varphi(\Omega) = n\pi \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

o que nos dá para os instantes de tempo em que a elongação do movimento é máxima em módulo

$$t_{MAX} = \frac{n\pi - \varphi(\Omega)}{\Omega}$$

A contante de fase é dada por:

$$\varphi(\Omega) = -arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = -arctan\left(\frac{2 \cdot 50}{50^2 - 50^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Substituindo em t_{MAX} temos:

$$t_{MAX} = \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{50}$$

$$\boxed{t_{MAX} = \frac{\pi}{100}(2n+1)\ s}$$

(d) Qual seria o novo regime de oscilação ? (justifique)

Quando a força externa é desligada passamos a ter um oscilador harmônico amortecido. Como $\omega_0 = 50\ rad/s$ e $\gamma = 2\ s^{-1}$ temos que:

$$\omega_0^2 > \frac{\gamma^2}{4}$$

ou seja, o sistema oscilaria no

$$\boxed{\text{regime subcrítico}}$$

(e) Qual seria a freqüência de oscilação?

No regime subcrítico a freqüência de oscilação é dada por:

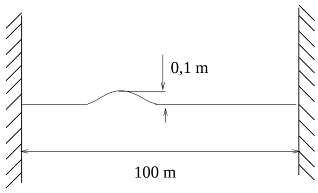
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \sqrt{2500 - \frac{4}{4}}$$

$$\boxed{\sqrt{2499}\ rad/s}$$

3. A figura mostra um pulso em uma corda de comprimento 100 m com as extremidades fixas. O pulso esta se deslocando com velocidade de 40 m/s e é descrito pela seguinte função

$$y(x,t) = 0,1e^{-4(x-vt)^2}$$

onde x é dado em metros e t em segundos.



(a) (1,0) Qual o valor de x, tal que a velocidade transversal da corda é máxima, em $t = 0$?

(b) (0,3) Qual a função que representa o pulso refletido, em um instante t logo após sua primeira reflexão?

(c) (0,2) Se a massa da corda é 2 kg, qual a tensão T nesta?

(d) (1,0) Escreva uma equação $y(x,t)$ que descreve numericamente uma onda senoidal, com $\lambda = 5\ m$ e mesma amplitude da onda anterior, se deslocando na direção negativa de x em uma corda muito longa, feita do mesmo material, com a mesma tensão acima, e tal que $y(0,0) = 0$

SOLUÇÃO

(a) Qual o valor de x, tal que a velocidade transversal da corda é máxima, em $t = 0$?

Velocidade transversal

$$v_y(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t) = 0,1e^{-4(x-vt)^2}\ [-8(x-vt)(-v)] = 0,8\, v(x-vt)e^{-4(x-vt)^2}$$

A velocidade tranversal será máxima quando

$$\frac{\partial}{\partial t} v_y(x,t) = 0$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial}{\partial t} v_y(x,t) &= 0,8v\left\{-ve^{-4(x-vt)^2} + [-8(x-vt)(-v)]\, e^{-4(x-vt)^2}\right\} \\
&= 0,8v^2 e^{-4(x-vt)^2}\, [8(x-vt)^2 - 1]
\end{aligned}$$

Para $t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_y(x,t)_{(t=0)} = 0,8v^2 e^{-4x^2}(8x^2 - 1)$$

x_{MAX} para o qual a velocidade transversal em $t = 0$ é maxima

$$8x_{MAX}^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{MAX} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$\boxed{x_{MAX} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ m}$$

(b) Qual a função que representa o pulso refletido, em um instante t logo após sua primeira reflexão?

O pulso refletido sofre uma inversão, ou seja

$$\boxed{y(x,t) = -0,1e^{-4(x+vt)^2}\ m}$$

(c) Se a massa da corda é 2 kg, qual a tensão T nesta?

A tensão na corda é dada por:

$$T = \mu v^2$$

onde μ é a densidade de massa da corda

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}\ kg/m$$

e v é a velocidade do pulso na corda

$$T = \frac{1}{50} \cdot (40)^2 = \frac{1600}{50}$$

$$\boxed{T = 32\ N}$$

(d) Escreva uma equação $y(x,t)$ que descreve numericamente uma onda senoidal, com $\lambda = 5\ m$ e mesma amplitude da onda anterior, se deslocando na direção negativa de

x em uma corda muito longa, feita do mesmo material, com a mesma tensão acima, e tal que $y(0,0) = 0$

Uma onda senoidal que se desloca para a esquerda é dada por:

$$y(x,t) = Acos(kx + \omega t + \delta)$$

Para um comprimento de onda de $\lambda = 5\ m$ temos que

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2}{5}\pi\ rad/m$$

e a frequência angular

$$\omega = kv = \frac{2}{5}\pi 40 = 16\pi\ rad/s$$

o que nos dá:

$$y(x,t) = 0,1\,cos\,(25\pi x + 16\pi t + \delta)$$

Para determinarmos a constante de fase usamos que $y(0,0) = 0$, ou seja,

$$y(0,0) = 0,1cos(\delta) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \frac{\pi}{2}$$

Assim,

$$\boxed{y(x,t) = 0,1\,cos\left(\frac{2}{5}\pi x + 16\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

4. Uma partícula de massa de repouso $m_0 = 1\ GeV/c^2$ e velocidade $v = \frac{\sqrt{3}}{2}\ c$ colide com outra partícula idêntica, mas que está em repouso. Após a colisão, as duas partículas caminham juntas, formando uma partícula composta, com massa de repouso M_0 e velocidade V após a colisão. Calcule, para essa partícula composta:

   (a) (1,0) Sua velocidade V após a colisão.

   (b) (1,0) Sua massa de repouso M_0.

   (c) (0,5) Sabendo que essa partícula decai depois de $t'_d = \sqrt{2} \times 10^{-8}\ s$ (tempo medido do referencial da partícula), calcule qual a distância total percorrida pela partícula desde o choque até a sua desintegração no referencial do laboratório.

SOLUÇÃO

(a) Sua velocidade V após a colisão.

Conservação do momento linear:

$$\gamma m_0 v = \gamma' M_0 V$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{e} \qquad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Conservação da energia relativística:

$$\gamma m_0 c^2 + m_0 c^2 = \gamma' M_0 c^2$$

Da equação da conservação da energia relativística temos:

$$(\gamma + 1) m_0 = \gamma' M_0$$

Substituindo na equação da conservação do momento linear:

$$\gamma m_0 v = (\gamma + 1) m_0 V$$

ou seja:

$$V = \frac{\gamma}{(\gamma+1)} v$$

Calculando γ

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3c^2}{4c^2}}} = 2$$

Então, a velocidade da partícula composta é:

$$V = \frac{2}{(2+1)} \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

$$\boxed{V = \frac{\sqrt{3}}{3}\, c}$$

(b) Sua massa de repouso M_0.

Utilizando novamente a equação da conservação da energia relativística

$$(\gamma + 1)m_0 = \gamma' M_0$$

obtemos M_0

$$M_0 = \frac{(\gamma + 1)}{\gamma'} m_0$$

Calculando γ'

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{3c^2}{9c^2}}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

A massa de repouso da partícula composta será:

$$M_0 = \frac{(2+1)}{\frac{3}{\sqrt{6}}} 1$$

$$\boxed{M_0 = \sqrt{6}\ GeV/c^2}$$

(c) Sabendo que essa partícula decai depois de $t'_d = \sqrt{2} \times 10^{-8}\ s$ (tempo medido do referencial da partícula), calcule qual a distância total percorrida pela partícula desde o choque até a sua desintegração no referencial do laboratório.

A distância percorrida pela partícula, no referencial do laboratório, será:

$$L = V t_d$$

onde t_d é o tempo de decaimento da partícula, medido no referencial do laboratório, ou seja,

$$t_d = \gamma' t'_d = \frac{3}{\sqrt{6}} \sqrt{2} \times 10^{-8} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times 10^{-8}\ s$$

Assim,

$$L = \frac{\sqrt{3}}{3} c \frac{3}{\sqrt{3}} \times 10^{-8}$$

$$\boxed{L = 3\ m}$$