FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova de Recuperação - 14/02/2008 - Gabarito

1. Uma massa é abandonada com velocidade inicial igual a zero de modo que atinge o solo 10 segundos depois de solta. Desprezando a resistência do ar, e tendo a freqüência angular de rotação da Terra $\omega = 7,5 \times 10^{-5}\ rad/s$ e a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, obtenha:

   (a) (1,5) A expressão que descreve a deflexão horizontal devido à rotação da Terra para uma latitude qualquer λ.

   (b) (0,5) O valor da deflexão quando a partícula é solta no equador.

   (c) (0,5) O valor da deflexão quando a partícula é solta no pólo norte.

   SOLUÇÃO

   (a) a expressão que descreve a deflexão horizontal devido à rotação da Terra para uma latitude qualquer λ.

   Devido à rotação da Terra a força de Coriolis

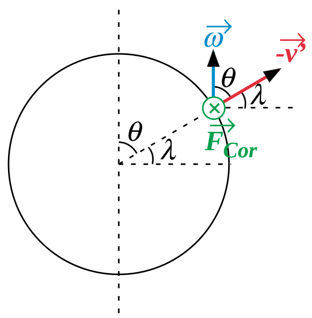
$$\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$$

   provoca um deslocamento horizontal na trajetória da partícula. A equação que descreve esse deslocamento é:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F_{Cor}$$

   onde x' é o deslocamento horizontal.

   Para uma partícula em queda livre como mostrado na figura abaixo, a força de Coriolis é dada por:



$$F_{Cor} = 2m\omega v'\,sen(\theta) = 2m\omega v'\,cos(\lambda)$$

apontando na direção leste

A equação do movimento será:

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = 2m\omega v'\, cos(\lambda)$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2\omega v'\, cos(\lambda)$$

Para a queda livre, a partir do repouso temos:

$$v' = gt$$

Assim,

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = 2\omega gt\, cos(\lambda)$$

Para determinarmos x' basta integrarmos duas vezes. Integrando a primeira vez usando que $\frac{dx'}{dt} = 0$ para $t = 0$ temos:

$$\frac{dx'}{dt} = \omega gt^2\, cos(\lambda)$$

Integrando mais uma vez e usando que $x' = 0$ para $t = 0$ temos

$$x' = \frac{1}{3}\omega gt^3\, cos(\lambda)$$

ou seja, a deflexão horizontal será dada por:

$$\boxed{x' = \frac{1}{3}\omega gt^3\, cos(\lambda)}$$

(b) O valor da deflexão quando a partícula é solta no equador.

Para a partícula solta no equador $\lambda = 0$ e substituindo os valores temos:

$$x'_E = \frac{1}{3} \cdot 7,5 \times 10^{-5} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 1$$

$$\boxed{x'_E = 0,25\ m}$$

(c) O valor da deflexão quando a partícula é solta no pólo norte.

Para a partícula solta no equador $\lambda = 90°$ e substituindo os valores temos:

$$x'_N = \frac{1}{3} \cdot 7,5 \times 10^{-5} \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 0$$

$$\boxed{x'_N = 0}$$

2. Um oscilador criticamente amortecido, partindo da posição de equilíbrio, recebe um impulso que lhe comunica uma velocidade inicial v_0. Verifica-se que ele passa por seu deslocamento máximo, igual a 3,68 m, após 1 segundo.

   (a) (1,5) Qual é o valor de v_0?

   (b) (1,0) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0 = 2$ m com a mesma velocidade inicial v_0, qual seria o valor de x no instante t?

SOLUÇÃO

(a) Qual é o valor de v_0?

Oscilador criticamente amortecido:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

Usando as condições iniciais $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$ temos:

$$x(0) = a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt) + be^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$v(0) = -\frac{\gamma}{2}a + b = v_0 \qquad \Rightarrow \qquad b = v_0$$

ou seja,

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}v_0 t$$

Para determinarmos o valor de v_0 vamos usar que a velocidade é nula quando o deslocamento é máximo $x_{MAX} = 3,68\ m$, ou seja

$$v(t) = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}v_0 t + v_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} = 0$$

$$-\frac{\gamma}{2}t + 1 = 0$$

O deslocamento máximo ocorre para $t = 1\ s$, assim

$$\gamma = 2\ s^{-1}$$

Substituindo na expressão para $x(t)$ temos

$$x(1) = e^{-1}v_0 \cdot 1 = 3,68$$

O que dá para a velocidade inicial

$$\boxed{v_0 = 3,68 \cdot e\ m/s}$$

(b) Se o oscilador tivesse um deslocamento inicial $x_0 = 2$ m com a mesma velocidade inicial v_0, qual seria o valor de x no instante t?

Usando que $x(0) = 2\ m$ temos

$$x(0) = a = 2 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2$$

Usando agora que

$$v(0) = -\frac{\gamma}{2}a + b = v_0 \qquad \Rightarrow \qquad b = v_0 + \frac{\gamma}{2}a$$

Como $a = 2\ m$, $\gamma = 2\ s^{-1}$ e $v_0 = 3,68e\ m/s$ temos que

$$b = 3,68e + 2$$

ou seja

$$\boxed{x(t) = e^{-t}\left[2 + (3,68e + 2)t\right]}$$

3. Uma corda oscila de acordo com a equação

$$y = (0,50)\,sen\left[\frac{\pi}{3}x\right]\,cos[40\pi t]$$

onde as unidades utilizadas são o cm e o segundo.

(a) (0,75) Quais são a amplitude e a velocidade escalar das ondas cuja superposição dá essa oscilação?

(b) (0,75) Qual é a distância entre os nós?

(c) (1,0) Qual é a velocidade escalar de uma partícula da corda na posição $x = 1,5\ cm$ quando $t = \frac{9}{8}\ s$?

SOLUÇÃO

(a) Quais são a amplitude e a velocidade escalar das ondas cuja superposição dá essa oscilação?

A equação que descreve uma onda estacionária é dada por:

$$y(x,t) = 2A\, sen(kx)\, cos(\omega t)$$

onde A é a amplitude das ondas, k o comprimento de onda e ω a velocidade angular.

A amplitude das ondas será então:

$$2A = 0,5$$

$$\boxed{A = 0,25\ cm}$$

A velodidade escalar das ondas é dada por:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi}{\frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{v = 120\ cm/s}$$

(b) Qual é a distância entre os nós?

A distância entre nós é dada por:

$$d = \frac{\lambda}{2}$$

onde λ é o comprimento de onda dado por:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6\ cm$$

Assim,

$\boxed{d = 3\ cm}$

(c) Qual é a velocidade escalar de uma partícula da corda na posição $x = 1,5\ cm$ quando $t = \frac{9}{8}\ s$?

Velocidade escalar:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -0,5 \cdot 40\pi sen\left[\frac{\pi}{3}x\right]\ sen[40\pi t]$$

$$v\left(1,5,\frac{9}{8}\right) = -0,5 \cdot 40\pi sen\left[\frac{\pi}{3}1,5\right]\ sen\left[40\pi\frac{9}{8}\right]$$

$$v\left(1,5,\frac{9}{8}\right) = -0,5 \cdot 40\pi sen\left[\frac{\pi}{2}\right]\ sen\left[45\pi\right]$$

$$\boxed{v\left(1,5,\frac{9}{8}\right) = 0}$$

4. Uma partícula é criada a 20 km acima do nível do mar com energia $E = 2\ MeV$ em relação à Terra, e passa a se deslocar verticalmente para baixo. No seu sistema próprio (sistema que se desloca com a mesma velocidade da partícula) ela se desintegra no intervalo de tempo $\Delta t' = 2,0 \times 10^{-8}\ s$ após a sua criação. A energia de repouso da partícula é $E_0 = \sqrt{3}\ MeV$. Determine, para um observador na Terra:

   (a) (1,0) Quanto tempo demora para a partícula se desintegrar?

   (b) (1,5) A que altura acima do nível do mar se dá a desintegração?

   SOLUÇÃO

   (a) Quanto tempo demora para a partícula se desintegrar?

   Energia relativística da partícula:

$$E = \gamma m_0 c^2 = \gamma E_0$$

   Assim,

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

O tempo necessário para a partícula se desintegrar, medido na Terra é

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t' = \frac{2}{\sqrt{3}} 2,0 \times 10^{-8}$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{4}{\sqrt{3}} \times 10^{-8}\ s}$$

(b) A que altura acima do nível do mar se dá a desintegração?

Velocidade da partícula:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} c = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} c = \frac{1}{2} c$$

Distância percorrida no referencial da partícula antes de se desintegrar:

$$L' = v \Delta t' = \frac{1}{2} c \cdot 2,0 \times 10^{-8} = 3\ m$$

Distância percorrida pela partícula no referencial da Terra antes de se desintegrar:

$$L = \gamma L' = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 3 = \frac{6}{\sqrt{3}}\ m$$

Altura acima do nível do mar em que se dá a desintegração:

$$H = 20000 - L$$

$$\boxed{H = \left(20000 - \frac{6}{\sqrt{3}}\right)\ m}$$