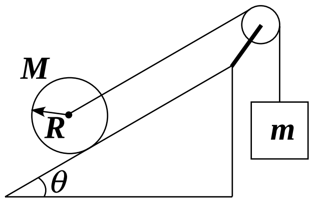
FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova Substitutiva - Gabarito

1. Um cilindro homogêneo de massa $M = 10$ kg e raio $R = 0,2$ m, cujo momento de inércia com relação ao centro de massa é dado por $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, rola sem deslizar sobre um plano inclinado de 30° com relação à horizontal. Uma massa $m = 2$ kg está ligada ao cilindro através de uma corda e uma polia, ambas sem massa, como mostrado na figura abaixo. A corda é ligada por meio de um suporte duplo preso às extremidades de um eixo sem atrito passando através do centro do cilindro de modo que o cilindro pode girar em torno do eixo. Calcule:



   (a) (1,0) a magnitude e a direção da aceleração do cilindro.

   Considerando-se que o cilindro desce o plano inclinado com aceleração a.

   Forças atuando sobre o bloco de massa m:

$$T - mg = ma$$

   Forças atuando sobre o cilindro:

$$Mg\,sen(\theta) - T - f_a = Ma$$

   onde T é a tração no fio e f_a a força de atrito entre o cilindro e a superfície do plano inclinado.

   Torque sobre o cilindro devido à força de atrito:

$$f_a R = I\alpha$$

   onde R é o raio, I o momento de inércia com relação ao eixo de rotação (que coincide com o centro de massa) e α a aceleração angular do cilindro.

   Usando-se que o momento de inércia é dado por $I = \frac{1}{2}MR^2$ e a aceleração angular por $\alpha = \frac{a}{R}$ obtém-se:

$$f_a = \frac{1}{2}Ma$$

Da equação de forças sobre o bloco de massa m obtém-se:

$$T = ma + mg$$

Juntando-se as três equações, tem-se:

$$Mg\,sen(\theta) - ma - mg - \frac{1}{2}Ma = Ma$$

$$a = \frac{Mg\,sen(\theta) - mg}{\left(\frac{3}{2}M + m\right)}$$

Substituindo-se os valores tem-se:

$$\boxed{a = \frac{30}{17}\ \mathrm{m/s^2}}$$

Com o bloco de massa m subindo verticalmente e o cilindro descendo o plano inclinado.

(b) (1,0) De quanto varia a energia potencial do sistema quando a massa m sobe 1 m.

A variação da energia potencial total (ΔU_T) é dada pela soma da variação da energia potencial do bloco de massa m (ΔU_m) com a variação da energia potencial do cilindro (ΔU_C)

$$\Delta U_T = \Delta U_m + \Delta U_C$$

O bloco de massa m sobe $h = 1$ m, portanto

$$\Delta U_m = mgh = 20\ \mathrm{J}$$

O centro de massa do cilindro desce de $H = h\,sen(\theta) = 0,5$ m e portando a variação da sua energia potencial será

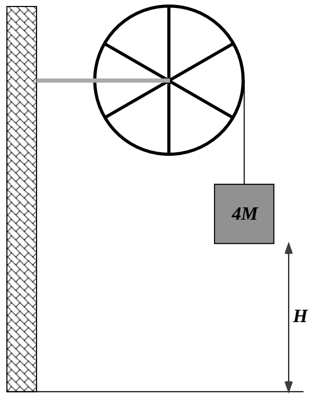
$$\Delta U_C = -MgH = -50\ \mathrm{J}$$

Assim, a variação da energia potencial total será

$$\boxed{\Delta U_T = -30\ \mathrm{J}}$$

2. Uma polia é composta de um anel e de 6 hastes, conforme esquematizado na figura (fora de escala). O comprimento de cada haste é R e sua massa $m_H = M$. O raio do anel é R e sua massa $m_A = 3M$. Um bloco de massa $m_B = 4M$, preso a uma corda ideal, enrolada na periferia da polia, é solto de uma altura H. Considere que a polia gira sem atrito em torno do eixo e que não haja deslizamento entre a corda e a polia.

O momento de inércia, com relação ao centro de massa, do anel e de cada haste é dado por $I_{A_{CM}} = m_A R^2$ e $I_{H_{CM}} = \frac{1}{12} m_H R^2$, respectivamente. Em termos dos parâmetros dados e de g



(a) (1,0) determine o momento de inércia I da polia em relação ao eixo de rotação.

O momento de inércia da polia com relação ao seu eixo de rotação será dado pelo momento de inércia do anel com relação ao seu centro de massa acrescido do momento de inércia, com relação à suas extremidades, das seis hastes.

Momento de inércia de uma haste com relação a sua extremidade (teorema dos eixos paralelos)

$$I_{H_E} = \frac{1}{12} M R^2 + M \left(\frac{R}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} M R^2$$

Momento de inércia da polia

$$I = 3MR^2 + 6 \left(\frac{1}{3} M R^2 \right)$$

$$\boxed{I = 5MR^2}$$

(b) (1,0) Utilizando a conservação da energia mecânica, determine a velocidade v do bloco ao atingir o solo.

Energia mecânica inicial = Energia potencial do bloco de massa $4M$

$$E_i = 4MgH$$

Energia mecânica final = Energia cinética de translação do bloco de massa $4M$ com velocidade v mais energia cinética de rotação da polia com velocidade angular $\omega = \frac{v}{R}$

$$E_f = \frac{1}{2}(4M)v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Conservação da energia mecânica

$$4MgH = \frac{1}{2}(4M)v^2 + \frac{1}{2}5MR^2\frac{v^2}{R^2}$$

Velocidade

$$\boxed{v = \frac{2\sqrt{2gH}}{3}}$$

3. Um corpo de massa $m = 1,0$ kg oscila livremente, quando preso a uma mola, com freqüência angular $\omega_0 = 2,0$ rad/s. Posteriormente este conjunto é colocado num líquido, cujo coeficiente de resistência viscosa é $\rho = 2\sqrt{3}$ kg/s.

   (a) (1,0) Escreva a equação diferencial do movimento harmônico amortecido, e a sua solução com as condições iniciais $x(0) = 0,50$ m e $v(0) = 0$.

   Equação do movimento harmônico amortecido:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = \frac{\rho}{m} = 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sqrt{3}\frac{dx}{dt} + 4x = 0}$$

   Solução geral:

   Como $\omega_0^2 = 4$ e $\frac{\gamma^2}{4} = 3$ tem-se que

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = 1 \text{ rad/s}$$

   tem-se então um oscilador harmônico amortecido no regime sub-crítico.

   Assim:

$$x(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\,cos(\omega t + \delta)$$

   onde A é a amplitude inicial de oscilação e δ a constante de fase.

   Velocidade:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[-\frac{\gamma}{2}\,cos(\omega t + \delta) - \omega\,sen(\omega t + \delta)\right]$$

   Usando as condições iniciais:

$$x(0) = A\,cos(\delta) = \frac{1}{2}$$

$$v(0) = A\left[-\frac{\gamma}{2}\,cos(\delta) - \omega\,sen(\delta)\right] = 0$$

Da equação da velocidade:

$$tan(\delta) = \frac{\gamma}{2\omega} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \frac{\pi}{3}$$

Da equação da posição:

$$A = \frac{1}{2}\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \qquad \Rightarrow \qquad A = 1 \text{ m}$$

Solução

$$\boxed{x(t) = e^{-\sqrt{3}t}\,cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (m)}}$$

(b) (1,0) Determine o tempo necessário T para que a amplitude do movimento diminua de um fator $1/e$ em relação ao valor inicial.

Amplitude em função do tempo:

$$A(t) = A\,e^{-\frac{\gamma}{2}t} = e^{-\sqrt{3}t}$$

$$A(0) = A = 1 \text{ m}$$

No instante de tempo T

$$A(T) = \frac{A(0)}{e} = e^{-\sqrt{3}T}$$

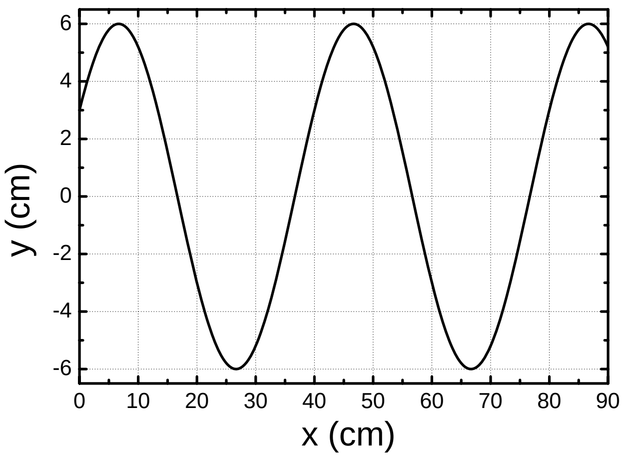
$$-1 = -\sqrt{3}T$$

$$\boxed{T = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ s}}$$

4. Uma onda transversal $y_1(x,t)$ se propaga em uma corda, orientada ao longo da direção x, no sentido de x decrescente. A figura abaixo mostra o gráfico do deslocamento da corda em função da posição, no instante de tempo $t = 0$ s. A tensão na corda é $T = 3,6$ N e a sua densidade linear é $\mu = 25 \times 10^{-3}$ kg/m. Nessas condições determine

(a) (1,0) a equação da onda $y_1(x,t)$;

Do gráfico tem-se: Amplitude $A = 6$ cm, amplitude inicial $y_1(0,0) = 3$ cm e comprimento de onda $\lambda = 40$ cm.



Vetor de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5\pi \text{ rad/m}$$

Velocidade de propagação:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = 12 \text{ m/s}$$

Freqüência angular:

$$\omega = kv = 60 \text{ rad/s}$$

Equação de onda que se propaga no sentido de x decrescente:

$$y_1(x,t) = A\,cos(kx + \omega t + \delta)$$

Determinação da constante de fase δ:

$$y_1(0,0) = A\,cos(\delta) \qquad \Rightarrow \qquad 0,03 = 0,06\,cos(\delta) \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \pm\frac{\pi}{3}$$

Velocidade de deslocamento do ponto $x = 0$ em $t = 0$ da corda:

$$v(x,t) = \frac{\partial y_1}{\partial t} = -\omega A\,sen(kx + \omega t + \delta)$$

$$v(0,0) = -\omega A\,sen(\delta)$$

Do gráfico nota-se que $v(0,0) > 0$, então $\delta = -\frac{\pi}{3}$.

Equação da onda:

$$\boxed{y_1(x,t) = 0,06\,cos\left(5\pi x + 60\pi t - \tfrac{\pi}{3}\right) \text{ (m)}}$$

(b) (1,0) a equação da onda $y_2(x,t)$ que deve ser superposta a $y_1(x,t)$ para que se obtenha uma onda resultante estacionária, e a equação $y(x,t)$ da onda estacionária resultante.

Para obter uma onda estacionária é necessário somar a $y_1(x,t)$ uma onda de mesma amplitude mas com sentido de propagação inverso, ou seja:

$$\boxed{y_2(x,t) = 0,06\,cos\left(5\pi x - 60\pi t - \tfrac{\pi}{3}\right)\ (\mathrm{m})}$$

Obtendo-se como onda resultante:

$$\boxed{y(x,t) = 0,12\,cos\left(5\pi x - \tfrac{\pi}{3}\right)\,cos(60\pi t)\ (\mathrm{m})}$$

5. Um próton, de massa de repouso $M_0 = 1,0$ GeV/c^2, desloca-se com velocidade $\vec{u}_p = 0,8\,c\,\hat{\imath}$ em relação ao referencial do laboratório. Um elétron, de massa de repouso $m_0 = 0,5$ MeV/c^2, desloca-se com velocidade $\vec{u}_e = 0,5\,c\,\hat{\imath}$ também em relação ao referencial do laboratório. Determine:

   (a) (1,0) a magnitude do momento linear p_p e a energia cinética T_p do próton, medidas no referencial do laboratório;

   Momento linear do próton:

$$\gamma_p = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_p^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{8^2}{10^2}}} = \frac{5}{3}$$

$$p_p = \gamma_p M_0 u_p = \frac{5}{3} 1 \frac{8}{10} c$$

$$\boxed{p_p = \frac{4}{3}\ \mathrm{GeV}/c}$$

   Energia cinética do próton:

$$T_p = (\gamma_p - 1) M_0 c^2 = \left(\frac{5}{3} - 1\right) 1$$

$$\boxed{T_p = \frac{2}{3}\ \mathrm{GeV}/c^2}$$

(b) (1,0) a velocidade do elétron $\vec{u}'_e$, a magnitude do momento linear p'_e e a energia relativística E'_e do elétron medidas no referencial do próton.

Velocidade do elétron no referencial do próton (todas as velocidades na direção x)

$$u'_e = \frac{u_e - u_p}{\left(1 - \frac{u_e u_p}{c^2}\right)} = \frac{\frac{5}{10}c - \frac{8}{10}c}{\left(1 - \frac{5 \cdot 8}{100}\right)}$$

$$\boxed{u'_e = -\frac{1}{2}c \text{ na direção } x}$$

$$\gamma_{e'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_e'^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1^2}{2^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Momento linear do elétron no referencial do próton:

$$p'_e = \gamma_{e'} m_0 u'_e = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$$

$$\boxed{p'_e = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ MeV}/c}$$

Energia relativística total do elétron no referencial do próton:

$$E'_e = \gamma_{e'} m_0 c^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E'_e = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ MeV}}$$