FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova P3 - Gabarito

1. Duas ondas senoidais propagam-se ao longo de uma corda em sentidos opostos. Cada onda tem amplitude de 0,6 cm e a distância entre duas cristas em ambas as ondas é de 4,0 cm. A velocidade de propagação de onda na corda é de 200 cm/s. Considere as fases iniciais das ondas como sendo nulas.

   (a) (0,5) Calcule o número de onda e a freqüência angular das ondas.

   Dados: Amplitude $A = 0,6$ cm, comprimento de onda $\lambda = 4$ cm e velocidade de propagação $v = 200$ cm/s.

   Número de onda:

   $$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

   $$\boxed{k = \frac{\pi}{2} \text{ rad/cm}}$$

   Freqüência angular:

   $$\omega = kv$$

   $$\boxed{\omega = 100\pi \text{ rad/s}}$$

   (b) (1,0) Determine a equação da onda resultante.

   Considerando $y_1(x,t) = A\,sen(kx - \omega t)$ e $y_2(x,t) = A\,sen(kx + \omega t)$

   A onda resultante será:

   $$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

   $$y(x,t) = 2A\,sen(kx)\,cos(\omega t)$$

   $$\boxed{y(x,t) = 1,2\,sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,cos(100\pi\,t) \text{ cm (t em segundos)}}$$

(c) (1,0) Determine a distância entre dois pontos da corda que possuem velocidade transversal nula.

Velocidade transversal:

$$v(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -120\pi\, sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\, cos(100\pi\, t)$$

Pontos em que a velocidade é nula:

$$sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}x = n\pi \qquad \Rightarrow \qquad x = 2n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

$$\boxed{x = 2 \text{ cm}}$$

2. Uma partícula denominada D^+ é criada com energia relativística $E = 10^6$ MeV (medida por um observador na Terra) a 5 km acima do nível do mar. Sua vida média própria é de $T_0 = 10^{-12}$ s e sua massa de repouso é 2000 MeV/c^2.

(a) (1,0) Qual será o tempo de vida médio do D^+ para um observador na Terra?

Dados: Energia relativística $E = 10^6$ MeV, vida média própria $T_0 = 10^{-12}$ s e massa de repouso 2000 MeV/c^2.

Energia relativística:

$$E = \gamma m_0 c^2 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \frac{E}{m_0 c^2} = 500$$

Tempo de vida média para um observador na Terra:

$$T = \gamma T_0$$

$$\boxed{T = 5 \times 10^{-10} \text{ s}}$$

(b) (1,0) Em média, a que distância, do ponto em que foi criada, a partícula se desintegrará ? Ela atingirá o nível do mar?

Velocidade:

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \qquad \Rightarrow \qquad v = \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)^{1/2} c$$

$$v = \left(1 - \frac{1}{500^2}\right)^{1/2} c \approx c$$

Distância percorrida:

$$\Delta x = cT$$

$$\boxed{\Delta x = 0,15 \text{ m}}$$

Portanto, a partícula não atingirá o nível do mar.

(c) (0,5) Dado que a massa de repouso de um muon é 20 vezes menor que a do D^+, qual é o tempo de vida médio próprio de um muon criado com a mesma energia que o D^+ do ítem (a), sabendo-se que com essa energia ele viaja 6×10^6 m antes de se desintegrar?

γ do muon:

$$\gamma_{muon} = \frac{E_{muon}}{(m_0c^2)_{muon}} = \frac{10^6}{10^2} = 10^4$$

Tempo de vida média do muon para um observador na Terra:

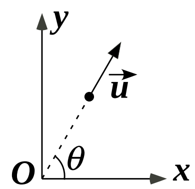
$$T_{muon} = \frac{\Delta x_{muon}}{c} = 2 \times 10^{-2}\,\text{s}$$

Tempo de vida médio próprio do muon:

$$T_{0_{muon}} = \frac{T_{muon}}{\gamma_{muon}}$$

$$\boxed{T_{0_{muon}} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}}$$

3. Um próton é observado do laboratório com velocidade de magnitude $u = |\vec{u}| = 0,5\,c$, formando um ângulo $\theta = 60°$ com a direção Ox, conforme a figura.



(a) (1,0) Determine a magnitude u' da velocidade do próton, quando observado no referencial S' que se move com velocidade $\vec{v} = 0,5\,c\,\hat{\imath}$.

Em S:

$$u_x = u\,cos(\theta) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}c = \frac{1}{4}\,c$$

$$u_y = u\,sen(\theta) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{4}\,c$$

Em S':

$$u'_x = \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{\frac{1}{4}c - \frac{1}{2}c}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}c}{\frac{7}{8}} = -\frac{2}{7}c$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}c\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)} = \frac{3}{7}c$$

Magnitude de u':

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{\frac{4}{49} + \frac{9}{49}}c$$

$$\boxed{u' = \frac{\sqrt{13}}{7}c}$$

(b) (0,5) Determine o ângulo θ' que o próton forma com o eixo $O'x'$ quando observado em S'.

$$tan(\theta') = \left(\frac{u'_y}{u'_x}\right)$$

$$\boxed{tan(\theta') = -\frac{3}{2}}$$

(c) (1,0) Se ao invés de um próton tivéssemos um fóton, qual seria a velocidade do fóton em relação ao referencial S'.

A velocidade do fóton seria c (a velocidade da luz), já que a velocidade da luz deve ser a mesma em qualquer referencial.

4. Duas partículas A e B, de massas de repouso $m_{0_A} = 4,0$ GeV/c^2 e $m_{0_B} = 3,0$ GeV/c^2 respectivamente, sofrem uma colisão, fundindo-se em uma única partícula C de massa de repouso não nula. Em relação ao referencial do laboratório, os vetores velocidade das partículas A e B, antes da colisão são, $\vec{v}_A = \frac{\sqrt{2}}{2}\,c\,\hat{\imath}$ e $\vec{v}_B = -\frac{4}{5}\,c\,\hat{\imath}$, respectivamente. Nessas condições determine:

(a) (0,5) a energia relativística (energia total) E do sistema antes da colisão.

Energia relativística:

$$E = \gamma_A m_{0_A} c^2 + \gamma_B m_{0_B} c^2$$

Fatores de Lorentz:

$$\gamma_A = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_A^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{4}\right)^{1/2}} = \sqrt{2}$$

$$\gamma_B = \frac{1}{\left(1 - \frac{v_B^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{16}{25}\right)^{1/2}} = \frac{5}{3}$$

$$E = \sqrt{2}\,4 + \frac{5}{3}\,3$$

$$\boxed{E = (4\sqrt{2} + 5)\ \text{GeV}}$$

(b) (1,0) a magnitude da velocidade v da partícula C, medida no referencial do laboratório, após a colisão.

Conservação do momento linear relativístico:

$$\gamma_A m_{0_A} \vec{v}_A + \gamma_B m_{0_B} \vec{v}_B = \gamma M_0 \vec{v} v$$

$$\gamma M_0 v = \sqrt{2}\,4\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{3}\,3\,\frac{4}{5} = 0$$

Como M_0 é não nula,

$$\boxed{v = 0}$$

(c) (1,0) a massa de repouso M_0 da partícula C após a colisão.

Por conservação da energia relativística, a energia da partícula C deve ser igual a energia relativística antes da colisão. Mas como a velocidade da partícula C é nula, esta só possui energia de repouso e ainda $\gamma = 1$. Assim,

$$\boxed{M_0 = (4\sqrt{2} + 5)\ \text{GeV}/c^2}$$