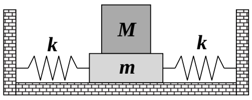
FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova P2 - Gabarito

1. Uma plataforma de massa m está presa a duas molas iguais de constante elástica k. A plataforma pode oscilar sobre uma superfície horizontal sem atrito. Um bloco de massa $M = 2m$ é colocado sobre a plataforma. O sistema "bloco + plataforma" oscila com freqüência angular ω.



(a) (0,5) Determine, em função de m e ω, o valor da constante k das molas.

Equação do movimento:

$$(m+M)\frac{d^2x}{dt^2} = -2kx \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{(m+M)}x = 0$$

A freqüência do sistema é então dada por:

$$\omega^2 = \frac{2k}{(m+M)} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{(m+M)\omega^2}{2}$$

Portanto:

$$\boxed{k = \frac{3}{2}m\omega^2}$$

(b) (1,0) Calcule, em termos da amplitude A, a força horizontal máxima exercida no bloco de massa M durante o movimento.

A força sobre o bloco de massa M será máxima quando a aceleração da plataforma for máxima:

$$x(t) = A\,cos(\omega t + \varphi) \qquad \Rightarrow \qquad a(t) = -\omega^2 A\,cos(\omega t + \varphi)$$

Então:

$$a_{MAX} = \omega^2 A$$

A força máxima sobre o bloco será:

$$F_{MAX} = M\,a_{MAX}$$

$$\boxed{F_{MAX} = 2m\omega^2 A}$$

(c) (1,0) Se o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a plataforma é μ_e, encontre o valor máximo da amplitude para o qual o bloco não desliza sobre a plataforma durante a oscilação.

Para que o bloco não deslize a força máxima sobre ele deve ser igual à força de atrito estático máxima, ou seja:

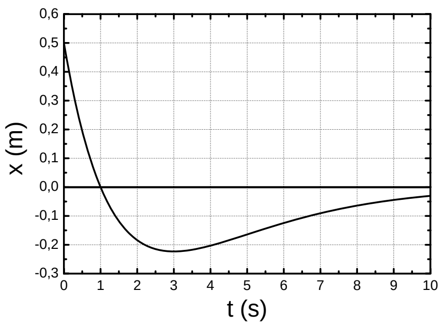
$$F_{MAX} = f_{e_{MAX}}$$

$$2m\omega^2 A_{MAX} = \mu_e M g = 2m\mu_e g$$

Portanto:

$$\boxed{A_{MAX} = \frac{\mu_e g}{\omega^2}}$$

2. O gráfico de $x(t)$, mostrado na figura abaixo, representa a equação horária de um oscilador criticamente amortecido, para um sistema composto de um corpo de massa $m = 1,0$ kg preso a uma mola de constante elástica k e imerso em um líquido viscoso, de coeficiente de resistência viscosa ρ.



(a) (0,5) Em que instante de tempo a velocidade do corpo será nula, no intervalo de tempo mostrado no gráfico?

$v(t) = 0$ quando $\frac{dx}{dt} = 0$. Através do gráfico temos:

$$\boxed{t = 3 \text{ s}}$$

(b) (0,5) A equação horária $x(t)$ pode ser escrita como

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt)$$

Determine os valores de a e b da equação.

Para $t = 0$ temos que $x(0) = \frac{1}{2}$. Da equação horária temos:

$$x(0) = a$$

Portanto:

$$\boxed{a = \frac{1}{2} \text{ m}}$$

Para $t = 1$ s temos que $x(1) = 0$. Da equação horária temos:

$$x(1) = e^{-\frac{\gamma}{2}}(\frac{1}{2} + b)$$

Como $e^{-\frac{\gamma}{2}}$ não pode ser nulo, temos que:

$$\boxed{b = -\frac{1}{2} \text{ m/s}}$$

(c) (1,0) Determine a constante de decaimento γ e a constante elástica da mola k.

Para determinar γ e k é necessário calcular a derivada de $x(t)$.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}(a + bt) + be^{-\frac{\gamma}{2}t} = \left[-\frac{\gamma}{2}(a + bt) + b\right] e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

Usando agora que $\frac{dx}{dt}(3) = 0$ temos:

$$\left[-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}3\right) - \frac{1}{2}\right] e^{-\frac{3\gamma}{2}} = 0$$

Como $e^{-\frac{3\gamma}{2}}$ não pode se anular, temos então que:

$$\frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Portanto:

$$\boxed{\gamma = 1 \text{ s}^{-1}}$$

(d) (0,5) Determine o valor da velocidade inicial do oscilador.

Velocidade inicial é dada por $\frac{dx}{dt}(0)$

$$\frac{dx}{dt}(0) = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}0\right) - \frac{1}{2}\right] e^{0}$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(0) = -\frac{3}{4} \text{ m/s}}$$

3. Um corpo de massa m desliza sobre um plano horizontal sem atrito sujeito a três forças: uma força elástica resultante da ação de uma mola de constante elástica k, uma força devido à resistência viscosa do meio, caracterizada pela constante de resistência viscosa ρ e uma força externa periódica $F(t) = F_0\, cos(\Omega t)$, sendo Ω a freqüência externa.

(a) (0,5) Escreva a equação diferencial que descreve o movimento do corpo e a sua solução estacionária.

Equação diferencial do oscilador:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho\frac{dx}{dt} - kx + F_0\, cos(\Omega t)$$

Reescrevendo:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\, cos(\Omega t)}$$

onde $\gamma = \frac{\rho}{m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Solução estacionária:

$$\boxed{x(t) = A(\Omega)\, cos[\Omega t + \varphi(\Omega)]}$$

onde

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2}}$$

e

$$\varphi(\Omega) = -arctan\left(\frac{\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

(b) (0,5) Considerando que $m = 50$ kg, $k = 5000$ N/m, $F_0 = 50$ N e $\rho = 500$ kg/s, calcule a freqüência natural do sistema e o seu fator de qualidade.

Freqüência natural do sistema:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5000}{50}}$$

$$\boxed{\omega_0 = 10 \text{ rad/s}}$$

Fator de qualidade:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma} = \frac{m\omega_0}{\rho} = \frac{50 \cdot 10}{500}$$

$$\boxed{Q = 1}$$

(c) (1,0) No regime estacionário, usando os valores do item anterior, determine o valor de Ω para o qual a amplitude do movimento é máxima.

A amplitude será máxima quando $\frac{dA}{d\Omega} = 0$ e dai obtem-se Ω_R.

$$\frac{dA}{d\Omega} = -\frac{1}{2}\frac{F_0}{m}\frac{[2(\omega_0^2 - \Omega^2)(-2\Omega) + 2\Omega\gamma^2]}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2]^{3/2}} = \frac{F_0}{m}\frac{[2\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) - \Omega\gamma^2]}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \gamma^2\Omega^2]^{3/2}}$$

$\frac{dA}{d\Omega} = 0$ quando

$$2\Omega(\omega_0^2 - \Omega^2) - \Omega\gamma^2 = 0$$

o que dá:

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

Com os valores fornecidos no item (b) temos:

$$\Omega_R = \sqrt{10^2 - \frac{10^2}{2}}$$

$$\boxed{\Omega_R = 5\sqrt{2}\ \text{rad/s}}$$

(d) (0,5) No regime estacionário, usando os valores do item (b), determine o valor da amplitude máxima.

A amplitude máxima ocorre para $A_{MAX} = A(\Omega_R)$:

$$A(\Omega_R) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + \frac{\gamma^2}{2}\right)^2 + \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}\right)\gamma^2}}$$

o que dá:

$$A_{MAX} = \frac{F_0}{m\gamma}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} = \frac{50}{50 \cdot 10}\frac{1}{\sqrt{10^2 - \frac{10^2}{4}}}$$

$$\boxed{A_{MAX} = \frac{1}{50\sqrt{3}}\ \text{m}}$$

4. Uma corda uniforme, de 20 m de comprimento e massa de 2 kg, está esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e freqüência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1,5 cm para cima.

Dados: comprimento $l = 20$ m, massa $m = 2$ kg, tensão $T = 10$ N, amplitude $A = 3$ cm $= 0,03$ m, freqüência $\nu = 5$ Hz e posição inicial $y(0,0) = 1,5$ cm $= 0,015$ m.

(a) (1,0) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda.

A velocidade da onda na corda é dada por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ onde μ é a densidade linear de massa da corda.

$$\mu = \frac{m}{l} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \text{ kg/m}$$

A velocidade será então:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{100} = 10 \text{ m/s}}$$

O comprimento de onda é dado por $\lambda = v\tau$ onde τ é o período da onda.

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{5} \text{ s}$$

Assim, o comprimento de onda será:

$$\boxed{\lambda = v\tau = \frac{10}{5} = 2 \text{ m}}$$

(b) (1,0) Escreva, como função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue à outra extremidade.

O deslocamento transversal é dado por:

$$y(x,t) = A\, cos(kx - \omega t + \delta)$$

onde $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi$ e $\omega = 2\pi\nu = 10\pi$. Para determinar δ devemos usar a condição inicial.

$$y(0,0) = 0,015 = 0,03\, cos(\delta) \qquad \Rightarrow \qquad cos(\delta) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \delta = \frac{\pi}{3}$$

Assim,

$$\boxed{y(x,t) = 0,03\, cos\left(\pi x - 10\pi t + \tfrac{\pi}{3}\right) \text{ m}}$$

(c) (0,5) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

A intensidade da onda é dada por:

$$I = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2$$

Então:

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\frac{1}{10}10(10\pi)^2\left(\frac{3}{100}\right)^2 = \frac{9\pi^2}{200}\ \mathrm{W}}$$