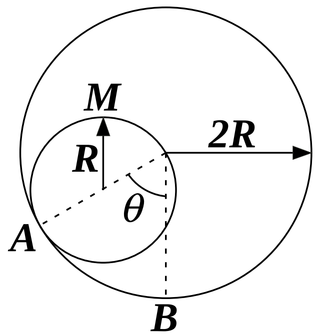
FEP2196 - Física para Engenharia II

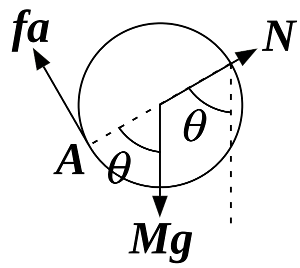
Prova P1 - Gabarito

1. Um cilindro de massa M e raio R rola sem deslizar no interior de um cilindro de raio $2R$ mantido fixo. O cilindro menor é solto a partir do repouso na posição A definida pelo ângulo $\theta = 60°$ (alterado para $\theta = 30°$). Em função de M, R e g (aceleração da gravidade) determine:



   (a) (1,0) O valor da força de atrito, no ponto A, para que o cilindro menor possa iniciar o movimento de rolamento sem deslizar, conhecendo-se os coeficientes de atrito estático ($\mu_e = 0,5$) e cinético ($\mu_c = 0,4$) entre as superfícies dos dois cilindros.

   Na posição A as forças que atuam sobre o corpo são mostradas na figura abaixo



   Pela segunda lei de Newton temos:

$$Mgsen(\theta) - f_a = Ma$$

   e a força de atrito produz um torque dado por:

$$f_a R = I\alpha = I\frac{a}{R}$$

onde I é o momento de inércia do cilindro de raio R com relação ao seu centro de massa ($I = \frac{1}{2}MR^2$). Substituindo o momento de inércia obtemos que:

$$f_a = \frac{1}{2}Ma$$

Substituindo a força de atrito na segunda lei de Newton obtemos a aceleração a:

$$a = \frac{2}{3}gsen(\theta)$$

Substituindo a aceleração na força de atrito temos:

$$f_a = \frac{1}{3}Mgsen(\theta)$$

que para $\theta = 30°$ dá:

$$f_a = \frac{1}{6}Mg$$

(b) (1,0) A velocidade do centro de massa do cilindro menor quando este atinge a posição B.

A energia mecânica do sistema se conserva quando o cilindro de raio R rola da posição A para a posição B. Tomando como zero da energia potencial o ponto B temos:

$$Mg[2R - Rcos(\theta)] - MgR = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

$$MgR[1 - cos(\theta)] = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

A condição para que o cilindro de raio R role sem deslizar é que $v_{CM} = \omega R$ e então

$$MgR[1 - cos(\theta)] = \frac{1}{2}I\frac{v_{CM}^2}{R^2} + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2$$

Utilizando que o momento de inércia do cilindro é dado por $I = \frac{1}{2}MR^2$ temos que:

$$MgR[1 - cos(\theta)] = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2$$

De onde obtemos:

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{4}{3}gR[1 - cos(\theta)]}$$

que para $\theta = 30°$ nos dá:

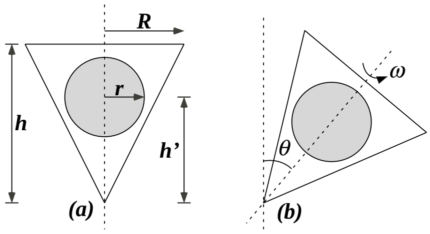
$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2}{3}gR(2 - \sqrt{3})}$$

(c) (0,5) A fração da energia cinética total do cilindro menor, na posição B, devida somente à rotação em torno do seu centro de massa.

A fração devida à energia cinética de rotação é:

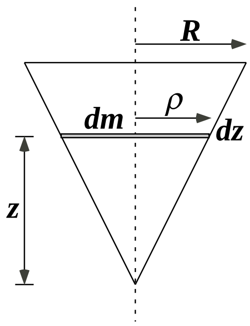
$$\frac{T_B^{rot}}{T_B} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{3}{4}Mv_{CM}^2} = \frac{\frac{1}{4}Mv_{CM}^2}{\frac{3}{4}Mv_{CM}^2} = \frac{1}{3}$$

2. Considere um cone maciço uniforme que possui massa M, raio do circulo da base R e altura $h = 2R$. Expresse os resultados solicitados abaixo em função de M, R e g (aceleração da gravidade).



(a) (1,0) Determine o momento de inércia do cone em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa, como mostrado na figura (a) abaixo.

Vamos considerar o cone formado por discos de raio ρ, espessura dz e massa dm



O momento de inércia do disco é dado por:

$$dI = \frac{1}{2}\rho^2 dm$$

A massa dm do disco pode ser obtida da massa M do cone, do volume V do cone e do volume dV do disco como:

$$dm = \frac{M}{V}dV = \frac{M}{\frac{\pi R^2 h}{3}}\pi\rho^2 dz = \frac{3M\rho^2}{R^2 h}dz$$

O momento de inércia do cone com relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa é obtido somando-se a contribuição de todos os discos necessário para compor o cone de $z = 0$ até $z = h$. O raio ρ do disco depende da altura z:

$$\rho = \frac{R}{h}z$$

Obtemos o momento de inércia como:

$$I_{CM}^{cone} = \int_0^h \frac{1}{2}\rho^2 \frac{3M\rho^2}{R^2 h} dz = \frac{3}{2}\frac{M}{R^2 h}\int_0^h \rho^4 dz = \frac{3}{2}\frac{M}{R^2 h}\int_0^h \frac{R^4}{h^4} z^4 dz = \frac{3}{2}\frac{MR^2}{h^5}\int_0^h z^4 dz$$

$$I_{CM}^{cone} = \frac{3}{10}MR^2$$

(b) (1,0) Um buraco esférico de raio $r = \frac{R}{2}$, com centro em $h' = \frac{2}{3}h$, é feito no cone, como mostra a figura (a) abaixo. Sabendo que o momento de inércia de uma esfera com relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa é dado por $I_{CM}^{esfera} = \frac{2}{5}mr^2$ onde m é a massa da esfera, calcule o momento de inércia da figura em relação a um eixo que passa pelo centro de massa do cone e da esfera.

A massa m da esfera pode ser obtida da massa M do cone, do volume V do cone e do volume V_e da esfera como:

$$m = \frac{M}{V}V_e = \frac{M}{\frac{\pi R^2 h}{3}}\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4Mr^3}{R^2 h}$$

Usando que $h = 2R$ e $r = \frac{R}{2}$ obtemos

$$m = \frac{1}{4}M$$

O momento de inércia de esfera será dado por:

$$I_{CM}^{esfera} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}M\right)\frac{R^2}{4} = \frac{1}{40}MR^2$$

Como a esfera foi retirada do cone, o momento de inercia do sistema será dado por:

$$I = I_{CM}^{cone} - I_{CM}^{esfera} = \frac{3}{10}MR^2 - \frac{1}{40}MR^2$$

$$I = \frac{11}{40}MR^2$$

(c) (0,5) O sistema é posto a girar com velocidade angular ω, em torno do eixo que passa pelo centro de massa do cone. Esse eixo encontra-se inclinado de um ângulo θ com relação à vertical (figura (b) abaixo). Calcule a velocidade angular de precessão do sistema.

A freqüência angular de precessão é dada por:

$$\Omega = \frac{M'gd}{I\omega}$$

onde M' é a massa do sistema, d a distância entre o ponto de apoio e o centro de massa, e I o momento de inércia do sistema.

A massa M' do sistema é:

$$M' = M - m = \frac{3}{4}M$$

Como o buraco esférico está centrado em $h' = \frac{2}{3}h$, que é o centro de massa do cone, o centro de massa do sistema não se altera. Portanto,

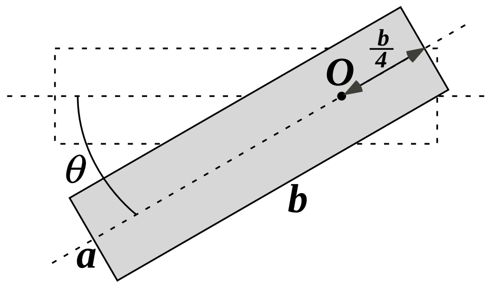
$$d = h' = \frac{2}{3}2R = \frac{4}{3}R$$

Assim, a freqüência angular de precessão será:

$$\Omega = \frac{\frac{3}{4}Mg\frac{4}{3}R}{\frac{11}{40}MR^2\omega}$$

$$\Omega = \frac{40g}{11R\omega}$$

3. Uma placa retangular de lados b e $a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ e massa M pode girar livremente em torno de um eixo que passa pelo ponto O e a atravessa perpendicularmente, conforme a figura. Determine, em função de M, b e θ:



(a) (0,5) O momento de inércia com relação ao eixo que passa pelo ponto O como mostrado na figura, sabendo que o momento de inércia da placa com relação ao seu centro de massa é dado por $I_{CM} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$.

Momento de inércia com relação ao centro de massa:

$$I_{CM} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) = \frac{1}{8}Mb^2$$

Momento de inércia com relação ao ponto O, usando o teorema dos eixos paralelos:

$$I_O = I_{CM} + M\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}Mb^2$$

(b) (1,0) A aceleração angular da placa após ter caído de um ângulo θ, sabendo que ela é solta a partir do repouso na posição horizontal.

O torque em relação ao ponto O devido à força peso aplicada ao centro de massa da barra provoca uma aceleração no sistema

$$\tau_O = I_O\alpha$$

$$Mg\frac{b}{4}cos(\theta) = \frac{3}{16}Mb^2\alpha$$

A aceleração angular do sistema será então:

$$\alpha = \frac{4}{3}\frac{g}{b}cos(\theta)$$

(c) (1,0) A velocidade angular da placa, para o mesmo ângulo do item anterior.

Durante a rotação da placa a energia mecânica do sistema se conserva. Tomando como zero da energia potencial a posição horizontal da placa temos:

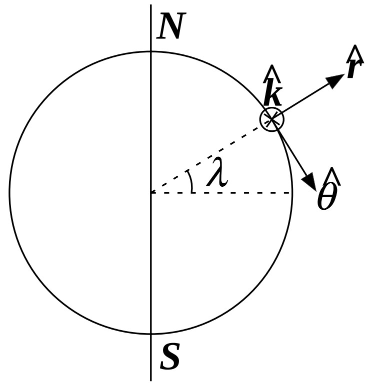
$$0 = U(\theta) + T(\theta)$$

onde $U(\theta)$ é a energia potencial do centro de massa da placa para um deslocamento θ e $T(\theta)$ a sua energia cinética. Então

$$0 = -Mg\frac{b}{4}sen(\theta) + \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgbsen(\theta)}{2I_O}} = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{g}{b}sen(\theta)}$$

4. Considere a força centrífuga devido à rotação da Terra atuando sobre um objeto de massa m: $\vec{F}_{cent} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})$. O raio da Terra é R e a latitude é λ.



(a) (0,5) Determine as componentes da velocidade angular da Terra $\vec{\omega}$ utilizando o sistema de coordenadas cujos versores são $\widehat{r}$ (radial), $\widehat{\theta}$ (ao longo do meridiano) e $\widehat{k}$ (ao longo do paralelo e entrando no plano do papel), mostrados na figura.

Componente radial:

$$\omega_r = \vec{w} \cdot \widehat{r} = \omega sen(\lambda)$$

Componente ao longo do meridiano:

$$\omega_\theta = \vec{w} \cdot \widehat{\theta} = -\omega cos(\lambda)$$

Componente ao longo do paralelo:

$$\omega_k = \vec{w} \cdot \widehat{k} = 0$$

(b) (0,5) Determine as componentes da força centrífuga no sistema de coordenadas do item anterior.

Força centrífuga:

$$F_{cent} = m\omega^2 r$$

onde r é a distância entre o eixo de rotação da Terra e o ponto tomado na superfície, ou seja, $r = Rcos(\lambda)$. Então:

$$F_{cent} = m\omega^2 Rcos(\lambda)$$

A força centrífuga é sempre perpendicular ao eixo de rotação, portanto:

Componente radial:

$$F_{cent,r} = m\omega^2 Rcos^2(\lambda)$$

Componente ao longo do meridiano:

$$F_{cent,\theta} = m\omega^2 Rcos(\lambda)\, sen(\lambda)$$

Componente ao longo do paralelo:

$$F_{cent,k} = 0$$

(c) (0,5) Indique, utilizando o mesmo sistema de coordenadas do item (a), para que direção, com relação à radial verdadeira, desvia-se um fio de prumo no hemisfério sul.

No Sul $F_{cent,\theta} = -m\omega^2 R cos(\lambda)\, sen(\lambda)$, portanto o desvio é para a direção $-\widehat{\theta}$, ou seja, para o Norte.

(d) (0,5) Em quais latitudes o ângulo de desvio entre a direção do fio de prumo e a direção radial verdadeira é máximo?

$cos(\lambda)\, sen(\lambda)$ é máximo para $\lambda = 45°$ (45° Norte) e para $\lambda = -45°$ (45° Sul).

(e) (0,5) Suponha que o fio de prumo esteja oscilando na direção norte-sul e considere o efeito da força de Coriolis $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$. Despreze o movimento radial (na direção de $\widehat{r}$) durante a oscilação. Determine a direção da força de Coriolis no hemisfério sul quando o pêndulo está oscilando do norte para o sul. Use o sistema de coordenadas do item (a).

Pêndulo oscilando de Norte para Sul:

$$\vec{v'} = v'\widehat{\theta} \qquad v' > 0$$

$$\vec{F}_{Cor} = 2m\omega v' sen(\lambda)\widehat{k}$$

Portanto, a força de Coriolis aponta na direção de $\widehat{k}$ (entrando no plano da folha).