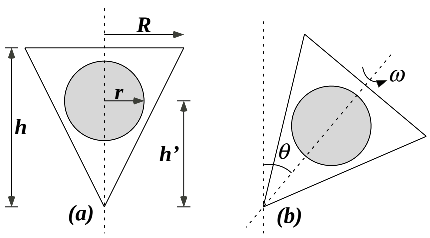
FEP2196 - Física para Engenharia II

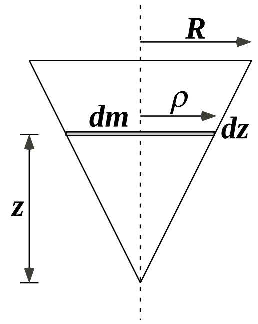
Prova P1 - Gabarito - Errata

2. Considere um cone maciço uniforme que possui massa M, raio do circulo da base R e altura $h = 2R$. Expresse os resultados solicitados abaixo em função de M, R e g (aceleração da gravidade).



   (a) (1,0) Determine o momento de inércia do cone em relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa, como mostrado na figura (a) abaixo.

   Vamos considerar o cone formado por discos de raio ρ, espessura dz e massa dm



   O momento de inércia do disco é dado por:

$$dI = \frac{1}{2}\rho^2 dm$$

   A massa dm do disco pode ser obtida da massa M do cone, do volume V do cone e do volume dV do disco como:

$$dm = \frac{M}{V}dV = \frac{M}{\frac{\pi R^2 h}{3}}\pi\rho^2 dz = \frac{3M\rho^2}{R^2 h}dz$$

   O momento de inércia do cone com relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa é obtido somando-se a contribuição de todos os discos necessário para compor o cone de $z = 0$ até $z = h$. O raio ρ do disco depende da altura z:

$$\rho = \frac{R}{h}z$$

Obtemos o momento de inércia como:

$$I_{CM}^{cone} = \int_0^h \frac{1}{2}\rho^2 \frac{3M\rho^2}{R^2 h} dz = \frac{3}{2}\frac{M}{R^2 h}\int_0^h \rho^4 dz = \frac{3}{2}\frac{M}{R^2 h}\int_0^h \frac{R^4}{h^4} z^4 dz = \frac{3}{2}\frac{MR^2}{h^5}\int_0^h z^4 dz$$

$$I_{CM}^{cone} = \frac{3}{10} MR^2$$

(b) (1,0) Um buraco esférico de raio $r = \frac{R}{2}$, com centro em $h' = \frac{2}{3}h$, é feito no cone, como mostra a figura (a) abaixo. Sabendo que o momento de inércia de uma esfera com relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa é dado por $I_{CM}^{esfera} = \frac{2}{5}mr^2$ onde m é a massa da esfera, calcule o momento de inércia da figura em relação a um eixo que passa pelo centro de massa do cone e da esfera.

A massa m da esfera pode ser obtida da massa M do cone, do volume V do cone e do volume V_e da esfera como:

$$m = \frac{M}{V} V_e = \frac{M}{\frac{\pi R^2 h}{3}} \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4Mr^3}{R^2 h}$$

Usando que $h = 2R$ e $r = \frac{R}{2}$ obtemos

$$m = \frac{1}{4} M$$

O momento de inércia de esfera será dado por:

$$I_{CM}^{esfera} = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}M\right)\frac{R^2}{4} = \frac{1}{40} MR^2$$

Como a esfera foi retirada do cone, o momento de inercia do sistema será dado por:

$$I = I_{CM}^{cone} - I_{CM}^{esfera} = \frac{3}{10} MR^2 - \frac{1}{40} MR^2$$

$$I = \frac{11}{40} MR^2$$

(c) (0,5) O sistema é posto a girar com velocidade angular ω, em torno do eixo que passa pelo centro de massa do cone. Esse eixo encontra-se inclinado de um ângulo θ com relação à vertical (figura (b) abaixo). Calcule a velocidade angular de precessão do sistema.

A freqüência angular de precessão é dada por:

$$\Omega = \frac{M' g d}{I\omega}$$

onde M' é a massa do sistema, d a distância entre o ponto de apoio e o centro de massa, e I o momento de inércia do sistema.

A massa M' do sistema é:

$$M' = M - m = \frac{3}{4}M$$

A coordenada do centro de massa do cone, ao longo da sua altura, pode ser calculada como:

$$z_{CM}^{cone} = \frac{1}{M}\int z\,dm$$

onde dm já foi calculado no item (a)

$$dm = \frac{3M}{h^3} z\,dz$$

Assim,

$$z_{CM}^{cone} = \frac{3}{h^3}\int_0^h z^3\,dz = \frac{3}{4}h$$

Como a esfera retirada está centrada em $h' = \frac{2}{3}h$, a distância d é obtida como:

$$d = \frac{z_{CM}^{cone}M + h'(-m)}{M + (-m)} = \frac{\frac{3}{4}hM - \frac{2}{3}h\frac{1}{4}M}{M - \frac{1}{4}M}$$

$$d = \frac{7}{9}h = \frac{14}{9}R$$

Assim, a freqüência angular de precessão será:

$$\Omega = \frac{\frac{3}{4}Mg\frac{14}{9}R}{\frac{11}{40}MR^2\omega}$$

$$\Omega = \frac{140g}{33R\omega}$$