FEP2196 - Física para Engenharia II

Prova REC - Gabarito

1. Considere um cilindro oco de massa M, raio externo R e raio interno r.

   (a) (1,0) Calcule o momento de inércia desse cilindro com relação ao eixo de simetria axial que passa pelo seu centro de massa.

   Momento de inércia de um cilindro maciço homogêneo de massa M e raio R com eixo de rotação de simetria axial passando pelo seu centro de massa:

   $$I_C = \frac{1}{2}MR^2$$

   Densidade de massa do cilindro:

   $$\rho_C = \frac{M}{V_C}$$

   onde V_C é o volume do cilindro.

   Momento de inércia em termos da densidade:

   $$I_C = \frac{1}{2}\rho_C V_C R^2$$

   Podemos considerar o cilindro oco como sendo formado por um cilindro maciço de raio R e um buraco cilíndrico concêntrico de raio r. O momento de inércia desse cilindro oco, com relação ao eixo de simetria axial que passa pelo seu centro de massa, utilizando-se o princípio da superposição, será dado por:

   $$I_{CO} = I_C - I_B$$

   onde I_C é o momento de inércia do cilindro maciço e I_B o momento de inércia do buraco cilíndrico. Assim

   $$I_{CO} = \frac{1}{2}\rho V_C R^2 - \frac{1}{2}\rho V_B r^2 = \frac{1}{2}\rho\left(V_C R^2 - V_B r^2\right)$$

   Os volumes são dados por:

   $$V_C = \pi R^2 h$$

   $$V_B = \pi r^2 h$$

   onde estamos considerando h como sendo o comprimento do cilindro oco.

   A densidade ρ é a densidade do cilindro oco e é dada por:

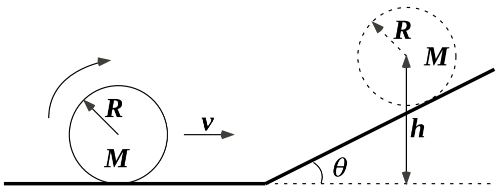
   $$\rho = \frac{M}{\pi h\left(R^2 - r^2\right)}$$

Substituindo os dados acima na expressão do momento de inércia do cilindro oco temos:

$$I_{CO} = \frac{1}{2}\frac{M}{\pi h\left(R^2 - r^2\right)}\left(\pi R^2 h R^2 - \pi r^2 h r^2\right) = \frac{1}{2}M\frac{\left(R^4 - r^4\right)}{\left(R^2 - r^2\right)}$$

$$\boxed{I_{CO} = \frac{1}{2}M\left(R^2 + r^2\right)}$$

(b) (1,5) Considere agora um cilindro homogêneo, de raio R e massa M (sem ser oco), que rola sem deslizar sobre um plano horizontal, deslocando-se com velocidade v, e sobe sobre um plano inclinado de inclinação θ, continuando a rolar sem deslizar (figura abaixo). Até que altura h o centro do cilindro subirá sobre o plano inclinado?



Vamos utilizar a conservação da energia mecânica. A energia mecânica inicial do cilindro é dada pela sua energia potencial, energia cinética de translação e energia de rotação (com relação ao seu centro de massa).

$$E_I = MgR + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

onde o zero de energia potencial foi tomado como a superfície do plano horizontal, I é o momento de inércia do cilindro com relação ao seu eixo de rotação $I = \frac{1}{2}MR^2$ e ω é a velocidade angular, que é dada por $\omega = \frac{v}{R}$, já que o cilindro rola sem deslizar. Assim,

$$E_I = MgR + \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2} = MgR + \frac{3}{4}Mv^2$$

A energia final do cilindro (quando parar sobre o plano inclinado) será puramente potencial e dada por:

$$E_F = Mgh$$

Utilizando a conservação da energia mecânica temos que

$$E_F = E_I$$

ou seja

$$Mgh = MgR + \frac{3}{4}Mv^2$$

$$\boxed{h = R + \frac{3}{4}\frac{v^2}{g}}$$

2. Certa mola sem massa está suspensa no teto com um pequeno objeto de massa m preso a sua extremidade inferior. O objeto é mantido inicialmente em repouso, numa posição y_i tal que a mola não fique nem esticada nem comprimida. O objeto é então liberado e oscila para cima e para baixo, sendo sua posição mais baixa 20 cm abaixo de y_i.

   (a) (1,0) Qual a freqüência angular da oscilação?

   Energia mecânica na posição inicial y_i

   $$E_I = -mgy_i$$

   sendo o zero de energia potencial tomado no teto.

   Energia mecânica na posição mais baixa (20 cm abaixo de y_i)

   $$E_F = -mg(y_i + y_b) + \frac{1}{2}Ky_b^2$$

   onde K é a constante da mola e $y_b = 20$ cm.

   Utilizando a conservação da energia mecânica temos

   $$-mgy_i = -mg(y_i + y_b) + \frac{1}{2}Ky_b^2$$

   ou

   $$\frac{K}{m} = \omega^2 = \frac{2g}{y_b} = \frac{20}{0,2}$$

   $$\boxed{\omega = 10 \text{ rad/s}}$$

   (b) (0,5) Qual a velocidade do objeto quando está 10 cm abaixo da posição inicial?

   Energia mecânica do sistema 10 cm abaixo da posição inicial.

   $$E_{y_v} = -mg(y_i + y_v) + \frac{1}{2}Ky_v^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

onde $y_v = 10$ cm.

Conservação da energia mecânica

$$E_I = E_{y_v}$$

$$-mgy_i = -mg(y_i + y_v) + \frac{1}{2}Ky_v^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy_v - \frac{1}{2}Ky_v^2$$

$$v = \sqrt{2gy_v - \frac{K}{m}y_v^2} = \sqrt{2gy_v - \omega^2 y_v^2} = \sqrt{2 \times 10 \times 0,1 - 100 \times 0,1^2}$$

$$\boxed{v = 1 \text{ m/s}}$$

(c) (1,0) Um objeto de massa 300 g é ligado ao primeiro objeto; logo após, o sistema oscila com metade da freqüência original. Qual a massa do primeiro objeto?

$$\Omega = \frac{1}{2}\omega$$

onde Ω é a freqüência do sistema depois da adição da massa de 300 g.

$$\sqrt{\frac{K}{m+M}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

onde $M = 300$ g.

$$\frac{K}{m+M} = \frac{1}{4}\frac{K}{m}$$

$$3m = M$$

$$\boxed{m = 100 \text{ g}}$$

3. Uma onda transversal harmônica propaga-se em uma corda, no sentido positivo do eixo x, com velocidade $v = 0,40$ m/s e freqüência $\nu = 2,0$ s^{-1}. No instante de tempo $t = 0$ s, o ponto da corda em $x = 0$ m, está se deslocando para cima e tem deslocamento vertical $y(0,0) = 0,10$ m e velocidade transversal $\frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = 0,40\,\pi$ m/s. Nessas condições determine:

(a) (0,5) o número de onda k da onda,

O número de onda k é dado por:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi \times 2}{0,40}$$

$$\boxed{k = 10\pi \text{ rad/m}}$$

(b) (1,0) a equação de onda $y(x,t)$, e

A expressão geral para uma onda que se propaga no sentido positivo do eixo x é dada por:

$$y(x,t) = A\,cos(kx - \omega t + \delta)$$

onde δ é a constante de fase. Tomando as condições iniciais fornecidas temos:

$$y(0,0) = A\,cos(\delta) = 0,10$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \omega A\,sen(kx - \omega t + \delta)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,0) = \omega A\,sen(\delta) = 0,40\pi$$

Então temos:

$$A\,cos(\delta) = 0,10$$

$$A\,sen(\delta) = 0,10$$

Resolvendo o sistema obtemos:

$$\delta = \frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

O que nos dá para a equação de onda:

$$\boxed{y(x,t) = \frac{\sqrt{2}}{10}\,cos\left(10\pi x - 4\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \; x \text{ em metros e } t \text{ em segundos}}$$

(c) (1,0) a magnitude da velocidade transversal máxima $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_M$ da corda.

A velocidade transversal é dada por:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \omega A\, sen(kx - \omega t + \delta)$$

e ela será máxima quando $sen(kx - \omega t + \delta) = 1$ e será dada por:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_M = \omega A$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_M = \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi \text{ m/s}}$$

4. Dois foguetes, A, B, partem da Terra com velocidade constante de magnitude $0,60\,c$ na mesma direção, mas em sentidos opostos, em relação à Terra, tendo sincronizado seus respectivos relógios, um com o outro e com o relógio da Terra, no momento da decolagem. Considere desprezíveis os efeitos da aceleração dos foguetes.

(a) (1,0) Determine a magnitude da velocidade do foguete A em relação ao foguete B.

Tomando $v_A = 0,6\,c$ e $v_B = 0,6\,c$ as velocidades dos foguetes A e B, respectivamente, com relação à Terra, temos que a velocidade do foguete A em relação ao foguete B, v'_A será dada por:

$$v'_A = \frac{v_A - v_B}{\left(1 - \frac{v_A \times v_B}{c^2}\right)}$$

Vamos considerar que o foguete B se desloca no sentido adotado como positivo do eixo x, então teremos o foguete A se deslocando no sentido negativo do mesmo eixo. Assim,

$$v'_A = \frac{-0,6\,c - 0,6\,c}{\left(1 - \frac{(-0,6\,c)\times 0,6\,c}{c^2}\right)}$$

$$\boxed{v'_A = -\frac{15}{17}\,c}$$

(b) (1,0) Após um ano medido na Terra, o foguete B emite um sinal luminoso. Depois de quanto tempo, nos referenciais da Terra, do foguete A e do foguete B, o foguete A recebe o sinal.

No referencial da Terra, em um ano, cada foguete se deslocou $0,6\,c \times 1$ ano. Como eles se deslocam em sentidos opostos, a distância entre eles medida da Terra será de $1,2\,c \times 1$ ano. O sinal emitido pelo foguete B percorrerá a distância $c\Delta t$, medida da Terra, no intervalo de tempo Δt. Enquanto isso o foguete A se deslocará, novamente para um observador na Terra, de $v_A \Delta t$. Assim,

$$1,2\,c \times 1 + 0,6\,c\,\Delta t = c\Delta t$$

O intervalo de tempo entre o pulso ser emitido em B e alcançar A, medido da Terra será

$$\boxed{\Delta t = 3 \text{ anos}}$$

Como os dois foguetes se deslocam com a mesma velocidade, em magnitude, em relação à Terra, o intervalo de tempo medido no referencial de A será o mesmo medido em B.

$$\Delta t' = \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1 - 0,6^2}}$$

$$\boxed{\Delta t' = 3,75 \text{ anos}}$$

(c) (0,5) O foguete A está indo na direção de uma estrela que fica a 6,0 anos-luz, medido por um observador da Terra. Determine o tempo que o foguete A leva para atingir esta estrela, segundo o relógio de bordo.

No referencial de A, a distância entre a Terra e a estrela será menor (contração do espaço)

$$d' = \frac{d}{\gamma}$$

onde $d = 6,0$ anos-luz.

No referencial de A, o tempo necessário para percorrer essa distância será

$$t' = \frac{d'}{v_A} = \frac{d}{\gamma v_A} = \frac{d\sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}}{v_A} = \frac{6,0\,c\sqrt{1 - 0,6^2}}{0,6\,c}$$

$$\boxed{t' = 8 \text{ anos}}$$