Reservatórios

Espero que este texto ajude a entender melhor o comportamento de um reservatório que troca calor com um objeto qualquer. Vale lembrar, *reservatório* é um objeto idealizado (modelo) cuja capacidade térmica é tão maior que a do objeto de interesse, que seu estado (particularmente sua temperatura) essencialmente não varia em razão do trânsito de calor. Em outras palavras, a energia interna do reservatório é tão grande que essencialmente não é afetada pela troca de calor ($Q_r/U_r \ll 1$). A seguir, o reservatório será tratado da mesma forma que o objeto, visando a construir, matematicamente, as aproximações usuais (utilizadas na disciplina).

Vamos considerar um objeto com capacidade térmica C_o e temperatura inicial $T_{o\,i}$ que entra em contato térmico com um reservatório com capacidade térmica C_r e temperatura inicial $T_{r\,i}$. Considerando o objeto e o reservatório como um sistema isolado, teremos:

$$Q_o + Q_r \;=\; C_o(T_{o\,f} - T_{o\,i}) \;+\; C_r(T_{r\,f} - T_{r\,i}) \;=\; 0 \;. \tag{1}$$

Uma vez que $(C_o/C_r) \ll 1$, é evidente que a variação de temperatura do objeto será muito pequena,

$$T_{r\,f} \;=\; T_{r\,i} \;-\; \left(\frac{C_o}{C_r}\right)\Delta T_o \;\approx\; T_{r\,i} \;, \tag{2}$$

desde que consideremos uma variação de temperatura razoável (finita) para o objeto, ΔT_o. Explorando a expressão acima, vamos escrever a variação de temperatura do reservatório na forma,

$$\Delta T_r \;=\; (T_{r\,f} - T_{r\,i}) \;=\; -\left(\frac{C_o}{C_r}\right)\Delta T_o \;, \tag{3}$$

onde,

$$\frac{\Delta T_r}{T_{r\,i}} \;\ll 1 \;. \tag{4}$$

Qual a variação de entropia do reservatório? Vamos aplica a definição, admitindo que a temperatura varia em razão de calor trocado quase-estaticamente:

$$\Delta S_r \;=\; \int \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \;=\; \int_{T_{r\,i}}^{T_{r\,f}} \frac{C_r dT}{T} \;=\; C_r \ln\left(\frac{T_{r\,f}}{T_{r\,i}}\right) \;=\; C_r \ln\left(\frac{T_{r\,i} + \Delta T_r}{T_{r\,i}}\right) \;=\; C_r \ln\left(1 + \frac{\Delta T_r}{T_{r\,i}}\right) \;. \tag{5}$$

Em vista da eq. (4), podemos considerar uma expansão de Taylor de primeira ordem para $\ln(x)$ em torno de $x = 1$:

$$\ln(1 + \Delta x) \;\approx\; \ln(1) \;+\; \left.\frac{d\ln(x)}{dx}\right|_{x=1} \Delta x \;=\; \Delta x \;, \tag{6}$$

válido para $\Delta x \ll 1$. Aplicando o resultado acima à eq. (5), teremos:

$$\Delta S_r \;=\; C_r \ln\left(1 + \frac{\Delta T_r}{T_{r\,i}}\right) \;\approx\; \frac{C_r \Delta T_r}{T_{r\,i}} \;=\; \frac{Q_r}{T_{r\,i}} \;=\; -\frac{Q_o}{T_{r\,i}} \;, \tag{7}$$

onde, na última passagem, foi utilizada a Conservação da Energia, eq. (1); isto é, o calor cedido (absorvido) pelo objeto é absorvido (cedido) ao reservatório. Note que a eq. (7) é a expressão que utilizamos na disciplina para a variação de entropia de um reservatório. A variação de temperatura (ΔT_r) será tão menor quanto maior for a capacidade térmica (C_r), de acordo com a eq. (3), sendo Q_r dado pelo produto entre uma quantidade muito grande e outra muito pequena.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao objeto,

$$\Delta S_o = \int \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \int_{T_{o\,i}}^{T_{o\,f}} \frac{C_o dT}{T} = C_o \ln\left(\frac{T_{o\,f}}{T_{o\,i}}\right) = C_o \ln\left(\frac{T_{o\,i} + \Delta T_o}{T_{o\,i}}\right) = C_r \ln\left(1 + \frac{\Delta T_o}{T_{o\,i}}\right) . \tag{8}$$

Nesse caso, $(\Delta T_o / T_{o\,i})$ não é necessariamente um número pequeno, pois o objeto pode sofrer variação significativa de temperatura. Assim, a expansão de Taylor de primeira ordem não é uma boa aproximação. Em geral, teríamos que incluir termos de ordem superior na expansão, tornando-a menos interessante como recurso para construir aproximações matematicamente mais simples (melhor calcular o logaritmo).