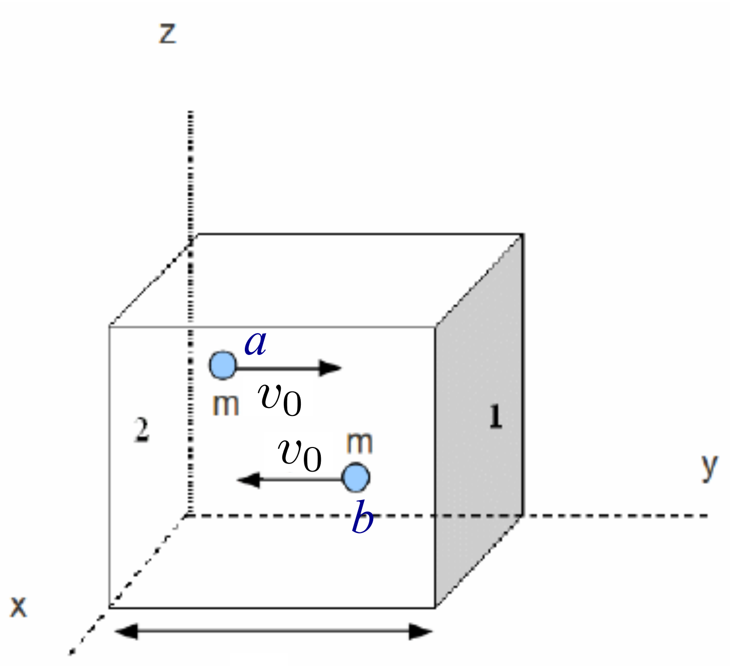
4300159 – Física do Calor

Gás Ideal:

Modelo Microscópico – II

Teoria Cinética: Modelo Microscópico Simplificado



$N/3$ partículas movendo-se em cada direção cartesiana.

Não há colisões entre partículas.

Gás monoatômico: 1 partícula = 1 átomo = 1 molécula

Considerando apenas 1 partícula:

– Intervalo entre colisões sucessivas: $\Delta t = \frac{2L}{v_0}$

– Momento linear transferido à parede (Δp) em uma colisão:

$$\Delta p = -\Delta p_{\text{particula}} = -(p_f - p_i) = -[-mv_0 - (mv_0)] = 2mv_0$$

– Força média sobre a parede 1: $\langle f \rangle \equiv \bar{f} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_0^2}{L}$

– Havendo *N*/3 partículas movendo-se na direção *x*, a pressão (força perpendicular média por unidade de área) sobre a parede 1 será:

$$P = \frac{N}{3}\frac{\langle f \rangle}{L^2} = \frac{N}{3}\frac{mv_0^2}{L^3}$$

$$\boxed{PV = N\ \left(\tfrac{1}{3}mv_0^2\right)}$$

– Admitindo que a Equação de Estado (empírica) seja válida para o modelo:

$$PV = N\ \left(\tfrac{1}{3}mv_0^2\right) = Nk_BT$$

$$\boxed{k_BT = \left(\tfrac{1}{3}mv_0^2\right) = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}mv_0^2\right)}$$

– A expressão acima relaciona a temperatura à energia cinética das moléculas.

Exercício: No modelo apresentado, considere que o gás contém 2 tipos de moléculas, ambos com massa m, mas velocidades escalares v_A e v_B. Há N moléculas no total ($N/3$ movendo-se em cada direção), sendo N_A do tipo A e N_B do tipo B, de forma que $N = N_A + N_B$ (com $N_A/3$ e $N_B/3$ em cada direção). Obtenha a pressão do gás e sua temperatura.

Sugestão: siga os passos discutidos anteriormente:

(i) Obtenha a força média exercida por uma molécula do tipo A e uma molécula do tipo B sobre uma das paredes.

(ii) Obtenha a pressão exercida por uma molécula do tipo A e uma molécula do tipo B sobre uma das paredes.

(iii) Obtenha a pressão exercida por $N_A/3$ moléculas do tipo A e $N_B/3$ moléculas do tipo B sobre uma das paredes.

(iv) Relacione a temperatura do gás à energia cinética média das moléculas, dada por $\langle K\rangle = (N_A/N)\ \frac{1}{2}mv_A^2 + (N_B/N)\ \frac{1}{2}mv_B^2$, admitindo que a relação $PV = Nk_BT$ seja válida para o modelo.

– Força média sobre uma parede devido a uma molécula de cada tipo:

$$\langle f \rangle = \langle f_A \rangle + \langle f_B \rangle = \frac{mv_A^2}{L} + \frac{mv_B^2}{L}$$

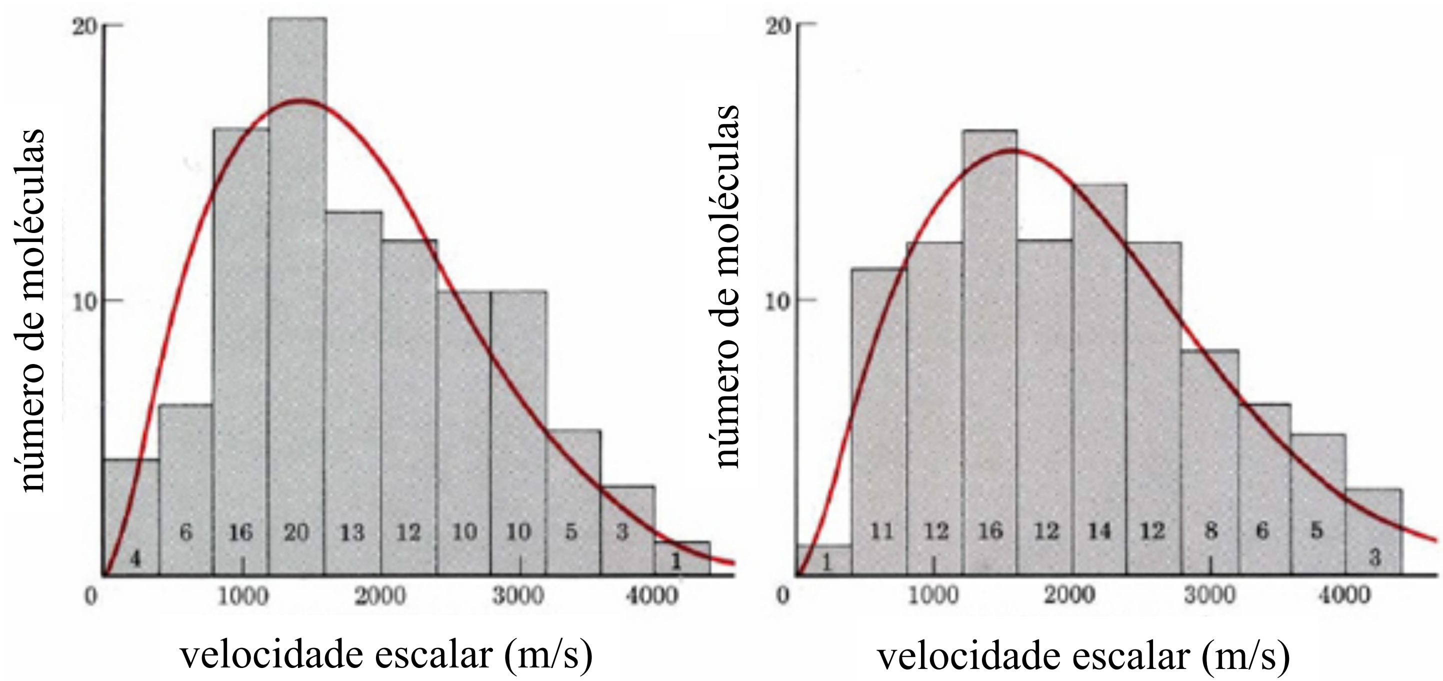
– Pressão devido a *N*/3 moléculas (note que a expressão abaixo está em acordo com a ideia de pressões parciais associadas a cada tipo de partícula):

$$\begin{aligned} P &= \frac{N_A}{3}\frac{\langle f_A \rangle}{L^2} + \frac{N_B}{3}\frac{\langle f_B \rangle}{L^2} \\ &= \frac{N_A}{3}\frac{mv_A^2}{L^3} + \frac{N_B}{3}\frac{mv_B^2}{L^3} \end{aligned}$$

– Manipulando a expressão acima, obtemos a temperatura em função da energia cinética média das partículas do gás:

$$PV = \tfrac{2N}{3}\left[\tfrac{N_A}{N}\tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{N_B}{N}\tfrac{1}{2}mv_B^2\right] = Nk_BT$$

$$k_BT = \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{N_A}{N}\tfrac{1}{2}mv_A^2 + \tfrac{N_B}{N}\tfrac{1}{2}mv_B^2\right] = \tfrac{2}{3}\langle K \rangle$$



– Os histogramas foram obtidos para uma coleção *extremamente pequena*, de apenas $N = 100$ moléculas, em tempos diferentes. Há diferenças entre os histogramas (flutuações), mas são relativamente modestas.

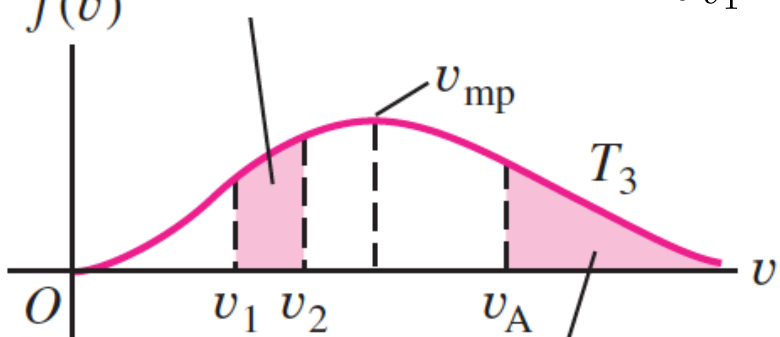
$$\langle v^2 \rangle = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_i^2}_{\text{soma sobre partículas}} \approx \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N_{\text{hist}}} N_\alpha \bar{v}_\alpha^2}_{\text{soma sobre histogramas}}$$

Distribuição de Maxwell

– Para grandes coleções de partículas (10^{23}), as flutuações são desprezíveis: a distribuição de velocidades é estacionária para um gás em equilíbrio.

– Tomando o limite de distribuição contínua (largura dos histogramas tendendo a zero, $\Delta v \rightarrow 0$) obtemos a Distribuição de Maxwell, $f(v)$, para as velocidades escalares:

Fração de moléculas com velocidade escalar entre v_1 e v_2: $N \int_{v_1}^{v_2} f(v)\, dv$



Fração de moléculas com velocidade escalar maior que v_A: $N \int_{v_A}^{\infty} f(v)\, dv$

Distribuição de Maxwell

$$\langle K \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i^2}$$

O valor médio $<v^2>$ pode ser obtido da distribuição $f(v)$.

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle$$

A partir da energia cinética média, obtemos:

$$PV = N\,\frac{2}{3}\langle K \rangle = Nk_BT$$

$$\frac{2}{3}\langle K \rangle = k_BT$$

$$\boxed{T = \frac{2}{3k_B}\langle K \rangle = \frac{m}{3k_B}\langle v^2 \rangle}$$

Velocidade (Raiz) Quadrática Média

Exercício: É usual caracterizar um gás pela velocidade raiz quadrática média (ou simplesmente velocidade quadrática média):

$$v_{rms} = \langle v^2 \rangle^{1/2}$$

Admita v_{rms} = 1350 m/s para um gás de átomos de hélio.

(a) Qual a temperatura do gás?

(b) Estime v_{rms} para os átomos de um gás de neônio à mesma temperatura.

Dados: as massas molares do hélio e do neônio são, respectivamente, M_{He} = 4.00 g/mol e M_{Ne} = 20.18 g/mol.

(a) Da relação entre energia cinética média e temperatura:

$$\langle K \rangle = \tfrac{3}{2} k_B T \implies T = \frac{m\langle v^2 \rangle}{3k_B} = \frac{M\langle v^2 \rangle}{3R} = 292\,\mathrm{K}$$

(b) Explorando a mesma relação para o neônio:

$$\langle K \rangle = \tfrac{3}{2} k_B T \implies \langle v^2 \rangle^{1/2} = \left(\tfrac{3k_B T}{m}\right)^{1/2} = \left(\tfrac{3RT}{M}\right)^{1/2} = 601\,\mathrm{K}$$

Perceba: temperaturas iguais implicam energias cinéticas médias iguais. Assim, a uma dada temperatura, v_{rms} é maior para o gás formado pelos átomos mais leves.