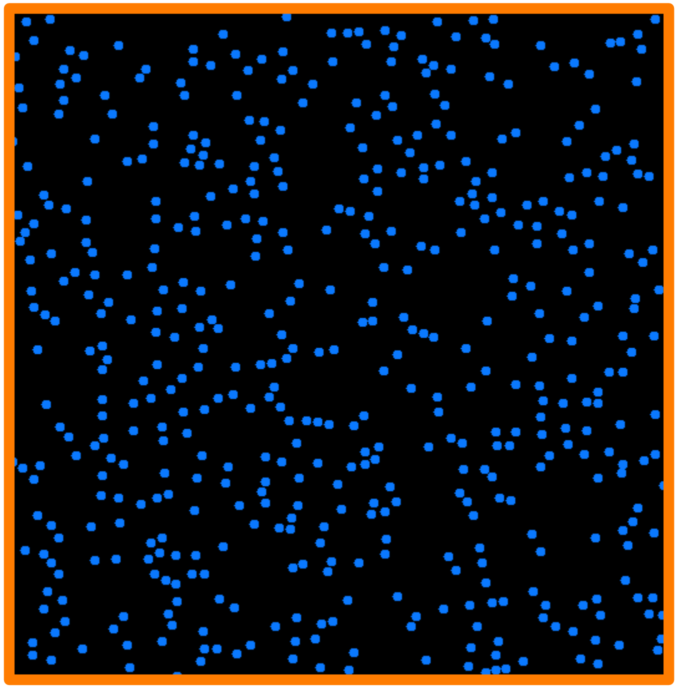
# 4300159 – Física do Calor

## Gás Ideal:

## Modelo Microscópico

# Teoria Cinética: Modelo do Gás Ideal Monoatômico



– Partículas ("átomos") puntiformes, com dimensão desprezível em comparação ao recipiente que as contém.

– Não há interação, a não ser por colisões elásticas entre as partículas e dessas contra as paredes do recipiente.

– As paredes do recipiente são rígidas e com massa infinita (muito maior que a massa das partículas).

A proposta da Teoria Cinética é obter propriedades macroscópicas do gás (pressão, temperatura, etc.) a partir de médias sobre as partículas, que ocorrem em números *gigantescos*, $N \sim N_A \approx 6 \times 10^{23}$.

# A Constante de Boltzmann

Em Física, é usual expressar a equação de estado dos gases ideais em termos do número de partículas:

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A}RT = N\frac{R}{N_A}T$$

A razão entre a constante dos gases e a constante de Avogadro ($R/N_A$) equivale à Constante de Boltzmann ($k_B$):

$$k_B = 1.3806 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$$

Sendo $k_B$ uma das constantes fundamentais da Física, iremos escrever a equação de estado na forma:

$$PV = Nk_BT$$

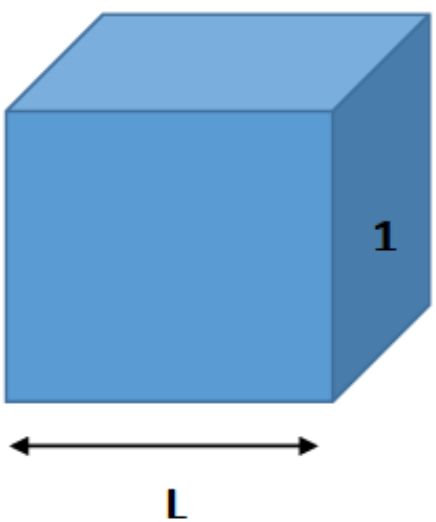
# Teoria Cinética: Modelo Microscópico

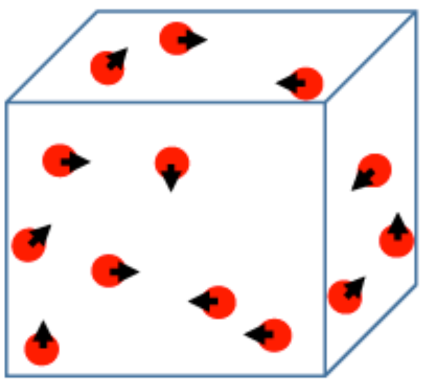
– Iremos considerar um modelo de gás ideal *ainda mais* idealizado:

1) Não levaremos em consideração colisões entre partículas (apenas contra as paredes).

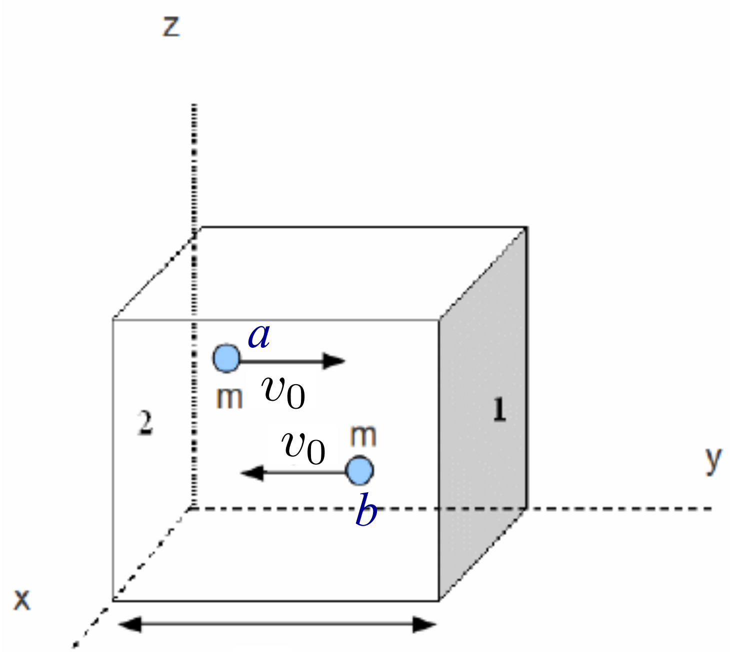
2) Vamos admitir que há $N/3$ moléculas movendo-se ao longo de cada direção cartesiana (o gás tem densidade uniforme).

3) As partículas se movem com velocidade de módulo constante entre as colisões.



– Iremos considerar um recipiente cúbico de lado $L$, (volume $V = L^3$), voltando a atenção a uma das paredes.

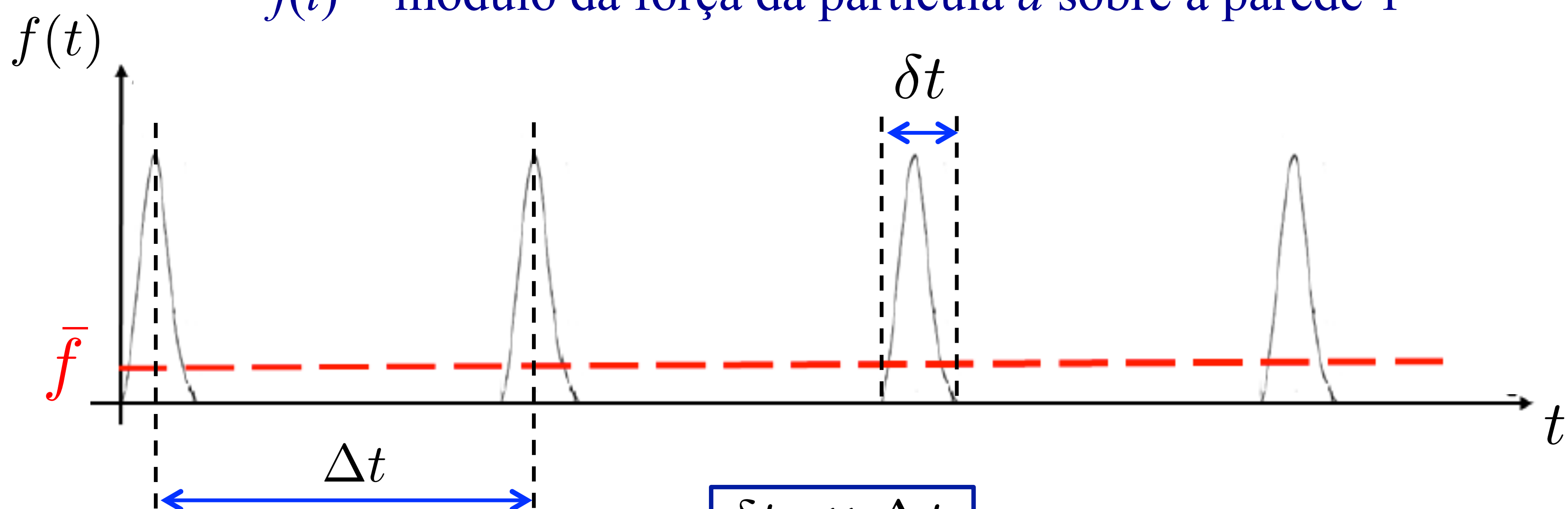



– **Escalas de tempo**:

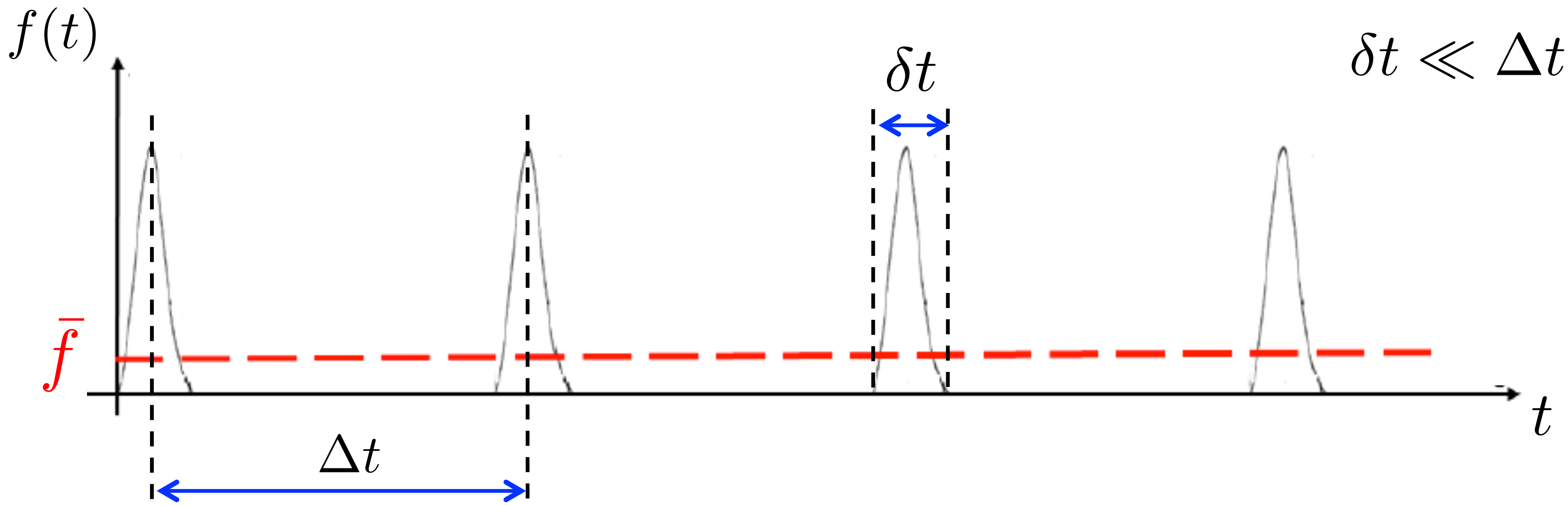
$\Delta t$ = intervalo entre colisões sucessivas de uma mesma molécula contra uma mesma parede.

$\delta t$ = duração de uma colisão contra a parede.

$f(t)$ = módulo da força da partícula *a* sobre a parede 1




$$\boxed{\delta t \ll \Delta t}$$




– Intervalo entre colisões sucessivas: $\Delta t = \dfrac{2L}{v_0}$

– Momento linear transferido à parede ($\Delta p$) em uma colisão:

$$\Delta p = -\Delta p_{\text{particula}} = -(p_f - p_i) = -[-mv_0 - (mv_0)] = 2mv_0$$

– Força média sobre a parede 1 (média temporal):

$$\langle f \rangle \equiv \bar{f} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_0^2}{L}$$

– Havendo *N*/3 partículas movendo-se na direção *x*, a pressão (força perpendicular média por unidade de área) sobre a parede 1 será:

$$P = \frac{N}{3}\frac{\langle f \rangle}{L^2} = \frac{N}{3}\frac{mv_0^2}{L^3}$$

$$\boxed{PV = N\,\left(\tfrac{1}{3}mv_0^2\right)}$$

– Admitindo que a Equação de Estado (empírica) seja válida para o modelo:

$$PV = N\,\left(\tfrac{1}{3}mv_0^2\right) = Nk_BT$$

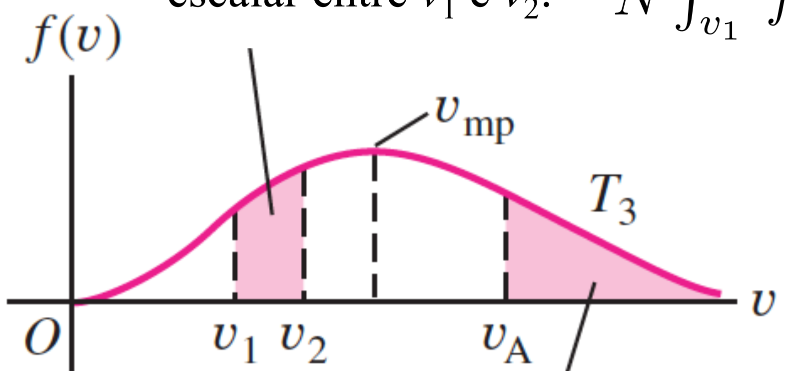
$$\boxed{k_BT = \left(\tfrac{1}{3}mv_0^2\right) = \tfrac{2}{3}\,\left(\tfrac{1}{2}mv_0^2\right)}$$

– A expressão acima relaciona a temperatura à energia cinética das moléculas.

# Distribuição de Maxwell

– No modelo mais elaborado de gás ideal, demonstra-se haver uma *distribuição de velocidades escalares*, denominada Distribuição de Maxwell, $f(v)$.

Fração de moléculas com velocidade escalar entre $v_1$ e $v_2$: $N\int_{v_1}^{v_2} f(v)\,dv$




Fração de moléculas com velocidade escalar maior que $v_A$: $N\int_{v_A}^{\infty} f(v)\,dv$

# Distribuição de Maxwell

– Não iremos explorar a Distribuição de Maxwell no curso (assunto abordado em Termoestatística), mas é importante observar que:

1) A distribuição de Maxwell permite calcular a energia cinética média das moléculas do gás (isto é, a média das energias cinéticas das partículas no gás):

$$\langle K \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m\,\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}v_i^2}$$

O valor médio $<v^2>$ pode ser obtido da distribuição $f(v)$.

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle$$

# Distribuição de Maxwell

2) O resultado anteriormente obtido no modelo simplificado (moléculas com mesma velocidade $v_0$) continua válido quando consideramos a energia cinética média obtida da distribuição de Maxwell:

$$PV = N \tfrac{2}{3}\langle K\rangle = Nk_BT$$

Isto é:

$$\tfrac{2}{3}\langle K\rangle = k_BT$$

$$\boxed{T = \frac{2}{3k_B}\langle K\rangle = \frac{m}{3k_B}\langle v^2\rangle}$$

A temperatura do gás ideal é dada pela energia cinética média das partículas (átomos) que constituem o gás.

# Energia Interna (Gás Ideal Monoatômico)

A Energia Interna ($U$) de um sistema é dada por $U = E - K_{CM}$, onde $E$ é a energia mecânica do sistema (soma das energias cinéticas das partículas e da energia mecânica associada às suas interações), e $K_{CM}$ é a energia cinética de translação do centro de massa.

No modelo do gás ideal não há interação (portanto a energia mecânica é apenas cinética). Se o gás estiver em equilíbrio, seu centro de massa estará em repouso.

A energia interna será, portanto, dada por:

$$U = \sum_{i=1}^{N} K_i = N \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} K_i \right) = N \langle K \rangle$$

De acordo com o resultado anterior, a energia interna do gás ideal será uma função da temperatura:

$$\boxed{U(T) = \frac{3}{2} N k_B T}$$