

## 1 Conceitos Preliminares

### 1.1 Lei de Hooke Generalizada

Considere o paralelepípedo de lados infinitesimais da Fig. 1-a submetido à tensão normal  $\sigma_y$  e vinculado na direção normal nas faces ocultas. Se o material for isotrópico e elástico linear, e as deformações forem pequenas, ensaios de tração simples fornecem as seguintes deformações lineares<sup>1</sup> nas três direções:

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \epsilon_x = \epsilon_z = -\nu \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_y, \quad (1)$$

em que  $E$  é o *módulo de elasticidade* e  $\nu$  é o *coeficiente de Poisson* do material.

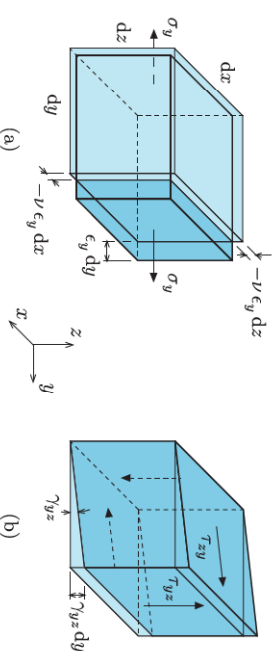


Fig. 1: Deformações do paralelepípedo provocadas por (a)  $\sigma_y$  e (b)  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zy}$ .

Se o mesmo paralelepípedo for submetido a tensões tangenciais  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , como indicado na Fig. 1-b em que o canto inferior esquerdo está fixo, a face à esquerda está vinculada na direção normal e sua aresta comum com a face inferior está vinculada na direção vertical, ensaios de torção de tubos de parede fina mostram que a distorção no plano  $yz$  é proporcional à tensão tangencial,

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

em que  $G$  é o *módulo de elasticidade transversal*.

Superpondo<sup>2</sup> os efeitos provocados por todas as componentes de tensão no paralelepípedo, conforme mostrado na Fig. 2, obtemos a deformação na direção  $x$

$$\epsilon_x = \epsilon_x^a + \epsilon_x^b + \epsilon_x^c.$$

<sup>1</sup>Também denominadas alongamentos lineares.

<sup>2</sup>Além da elasticidade linear do material, a superposição de efeitos requer que tanto as rotações quanto as deformações sejam pequenas.

# Noções sobre Energia de Deformação

Edgard S. Almeida Neto

Escola Politécnica da USP

24 de Maio de 2017

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1	Lei de Hooke Generalizada . . . . .	2
1.2	Relação entre $E$ , $G$ e $\nu$ . . . . .	5
1.3	Deformação Volumétrica . . . . .	7
1.4	Potência e Trabalho de uma Força . . . . .	8
1.4.1	Potência . . . . .	8
1.4.2	Trabalho . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Energia de Deformação</b>	<b>10</b>
2.1	Definição . . . . .	11
2.2	Energia de Deformação de um Sólido . . . . .	13
2.3	Decomposição da Energia de Deformação . . . . .	15
2.4	Energia de Deformação de uma Barra . . . . .	19
2.4.1	Flexão Normal Composta . . . . .	19
2.4.2	Flexão Obliqua Composta . . . . .	20
2.4.3	Caso Geral: Flexão Composta e Torção Uniforme . . . . .	22
2.4.4	Exemplos . . . . .	23

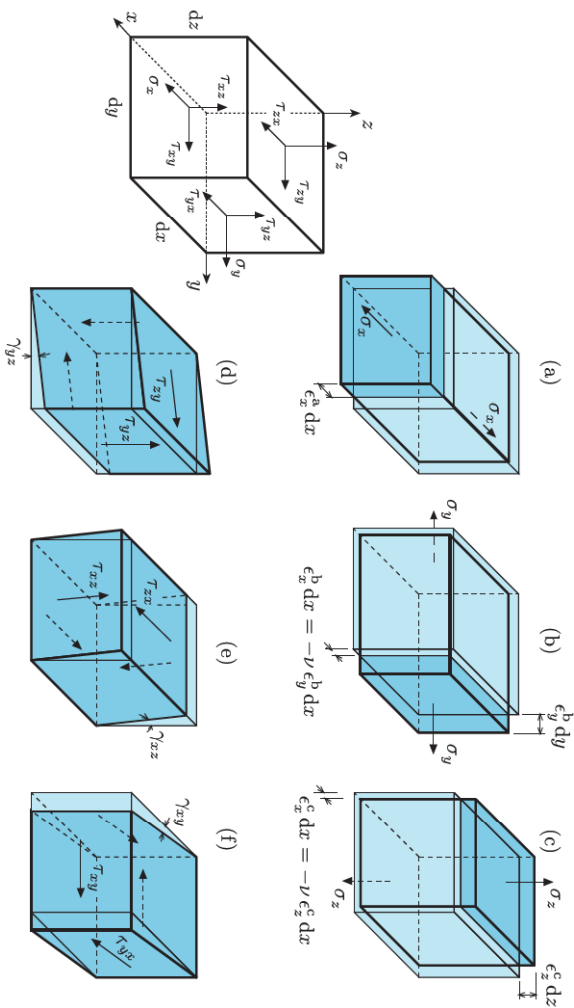


Fig. 2: Deformações provocadas pelas componentes de tensão no paralelepípedo.

As três parcelas, uma deformação longitudinal e duas transversais, são oriundas das tensões normais uma vez que as tensões tangenciais provocam apenas *distorção*, não alterando o comprimento das fibras nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,

$$\epsilon_x^a = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \epsilon_y^b = -\nu \epsilon_y^b = -\frac{\nu}{E} \sigma_y, \quad \epsilon_z^c = -\nu \epsilon_z^c = -\frac{\nu}{E} \sigma_z.$$

Resultando

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} (\sigma_y + \sigma_z).$$

Procedendo de modo análogo para as demais tensões normais e organizando as expressões obtidas, chegamos às seguintes deformações lineares:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \quad (2)$$

E para as distorções, uma vez que a distorção em um plano não afeta as distorções nos demais

planos normais quando o material é isotrópico,

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad (3)$$

Será demonstrado a seguir que as constantes  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  do material não são independentes e vale a relação

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

As Eqs. (2)-(3) expressam a *lei de Hooke generalizada*, a qual pode ser reescrita na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} \quad \epsilon = D\sigma. \quad (4)$$

Ou na forma inversa,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad \sigma = C\epsilon.$$

em que  $C$  é a matriz de elasticidade de um material isotrópico e elástico linear.

**Exemplo 1 (Aterro)** Determine a deformação vertical sob um aterro que exerce uma tensão  $p$  de compressão sobre a superfície de solo. Admita um comportamento elástico linear do solo e que este esteja totalmente confinado.

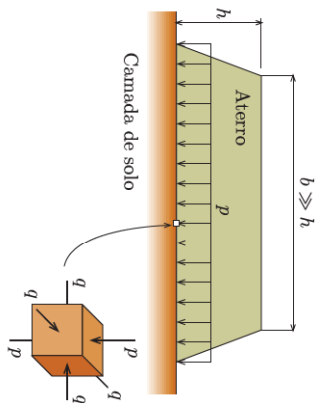


Fig. E1: Aterro.

**SOLUÇÃO**  
Da figura, temos

$$\sigma_z = -p, \quad \sigma_x = \sigma_y = -q.$$

A condição de confinamento impõe deformação nula no plano horizontal, ou seja

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{1}{E} [-q - \nu(-q - p)] = 0,$$

$$(1 - \nu)q = \nu p \quad \Rightarrow \quad \boxed{q = \frac{\nu}{1 - \nu} p = K_0 p},$$

em que  $K_0$  é denominado *coeficiente de empuxo em repouso* do solo.

A deformação na direção  $z$  é dada por

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [-p - \nu(-q - q)] = \frac{1}{E} [-p + 2\nu K_0 p] = - \left( \frac{1 - 2\nu K_0}{E} \right) p.$$

A relação inversa é importante pois estabelece o *módulo de elasticidade confinado*  $E_{conf}$ ,

$$\sigma_z = -p = \frac{E}{1 - 2\nu K_0} \epsilon_z = \frac{(1 - \nu)E}{1 - \nu - 2\nu^2} \epsilon_z = E_{conf} \epsilon_z.$$

## 1.2 Relação entre $E$ , $G$ e $\nu$

A relação entre as constantes de um material isotrópico pode ser deduzida considerando as deformações do estado de cisalhamento simples. Esse é o estado de tensão que ocorre no ensaio de torção de um tubo circular de parede fina, Fig. 3.

Considere o prisma infinitesimal da Fig. 4-a cujos lados paralelos aos eixos  $x$  e  $y$  formam um quadrado com diagonais de mesmo comprimento indeformado  $2d$ . A relação entre a distorção  $\gamma$ , gerada pela tensão  $\tau_0$  nas faces laterais, e os comprimentos deformados  $a$  e  $b$  das metades

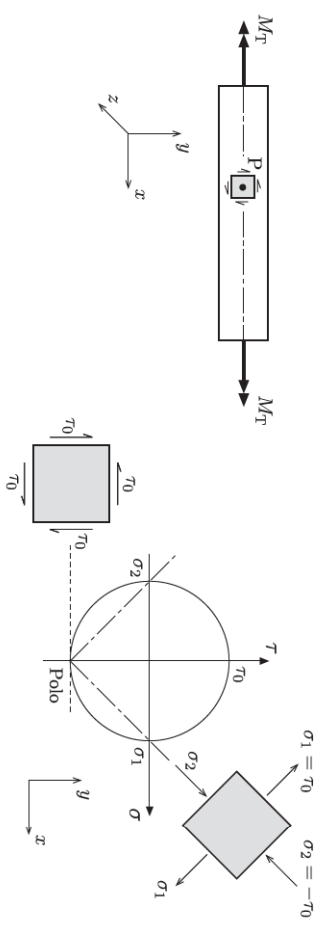


Fig. 3: Ensaio de torção uniforme. Estado de cisalhamento simples.

das diagonais é obtida a partir do triângulo superior da figura,

$$\tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{a}{b}.$$

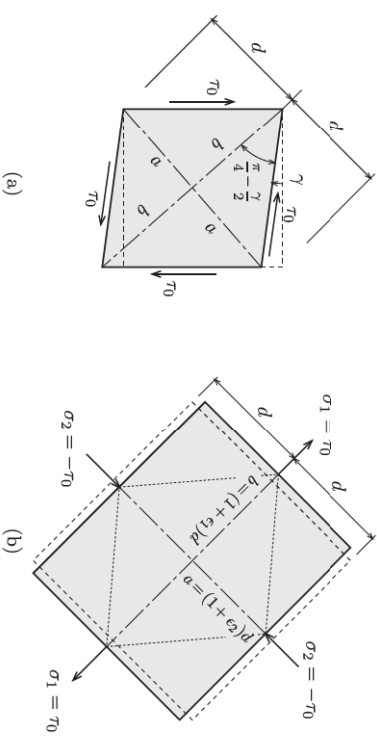


Fig. 4: Prismas quadrangulares em torno do ponto P.

Empregando a fórmula da tangente da diferença de dois ângulos,

$$\tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{\gamma}{2}}{1 + \tan \frac{\gamma}{2}},$$

e lembrando que  $\tan \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$  para pequenas deformações, chegamos ao quociente

$$\frac{a}{b} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}. \tag{5}$$

Considere agora o prisma infinitesimal inclinado de  $45^\circ$  na Fig. 4-b, cujas arestas indicadas têm comprimento  $2d$ . Nas faces laterais atuam as tensões principais  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  do estado duplo como mostra o círculo de Mohr da Fig. 3. Os comprimentos deformados  $a$  e  $b$  agora são

$$a = (1 + \epsilon_2)d, \quad b = (1 + \epsilon_1)d,$$

em que  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são deformações principais dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) = \frac{1+\nu}{E}\tau_0, \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) = -\frac{1+\nu}{E}\tau_0. \end{aligned}$$

Assim o quociente pode ser reescrito e comparado com o obtido geometricamente,

$$\frac{a}{b} = \frac{1 - \frac{1+\nu}{E}\tau_0}{1 + \frac{1+\nu}{E}\tau_0} = \frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}}$$

Logo

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1+\nu}{E}\tau_0 \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma$$

Finalmente, em decorrência da definição  $\tau = G\gamma$ , obtemos a relação procurada

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

### 1.3 Deformação Volumétrica

A deformação volumétrica em torno de um ponto P é definida por

$$\epsilon_V = \lim_{\Delta V_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta V - \Delta V_0}{V_0} \quad (6)$$

em que  $\Delta V_0$  e  $\Delta V$  denotam os volumes nas configurações indeformada e deformada.

Considerando a deformação do paralelepípedo infinitesimal da Fig. 5, temos

$$\epsilon_V = \frac{(1 + \epsilon_x)dx(1 + \epsilon_y)dy(1 + \epsilon_z)dz - dx dy dz}{dx dy dz} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + O(\epsilon^2)$$

Para pequenas deformações, os produtos das deformações são desprezíveis face aos valores das

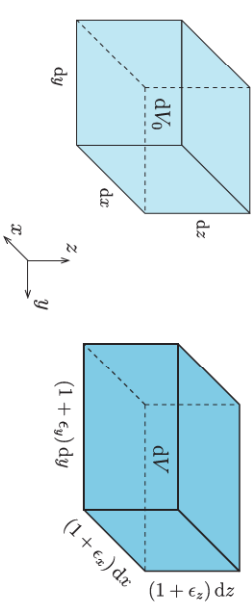


Fig. 5: Deformação volumétrica de um paralelepípedo elementar.

deformações lineares e chegamos a

$$\boxed{\epsilon_V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z.} \quad (7)$$

Quando as deformações lineares são dadas pelas Eqs. (2), resulta

$$\epsilon_V = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Definindo a *tensão normal média* ou *esférica* por

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad (8)$$

obtemos a relação

$$\epsilon_V = \frac{3(1 - 2\nu)}{E}\sigma_m$$

que é mais conhecida na forma inversa,

$$\sigma_m = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}\epsilon_V = K\epsilon_V, \quad (9)$$

em que  $K$  é o *módulo de compressibilidade volumétrica* ou *módulo de elasticidade volumétrico* e relaciona a deformação volumétrica com a parcela hidrostática do estado de tensão.

## 1.4 Potência e Trabalho de uma Força

### 1.4.1 Potência

A *potência* de uma força  $\mathbf{F}$  cujo ponto de aplicação move-se com velocidade  $\mathbf{v}$  é definida por

$$\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta, \quad (10)$$

em que  $(\bullet)$  indica o produto escalar de dois vetores e  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{v}$ , Fig. 6-a.

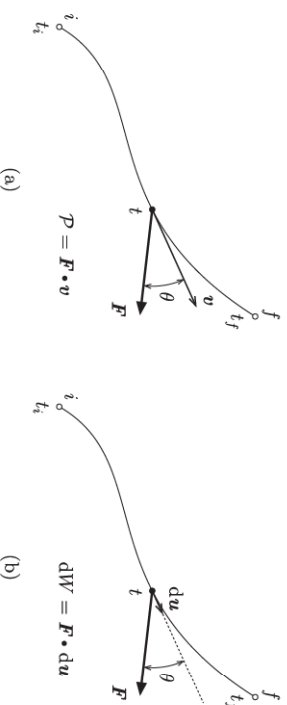


Fig. 6: Potência e Trabalho elementar de uma força.

A *potência* de um momento  $M$  cujo ponto de aplicação gira de acordo com o vetor velocidade angular  $\omega$  é definida por

$$P = M \cdot \omega. \quad (11)$$

Quando o movimento está restrito a um plano, a Eq. (11) simplifica-se em

$$P = M\dot{\varphi}, \quad (12)$$

em que  $\varphi$  é o ângulo de giro e  $\dot{\varphi}$  é a velocidade angular, ou seja  $\omega = \dot{\varphi}e$  sendo  $e$  o versor normal ao plano.

### 1.4.2 Trabalho

O *trabalho* realizado pela força  $\mathbf{F}$  entre os instantes  $t_i$  e  $t_f$  é dado por

$$W = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{P} dt = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{u_i}^{u_f} \mathbf{F}(\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{u}, \quad (13)$$

em que a notação  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  indica que a força pode variar ao longo da trajetória, Fig. 6-b. Portanto, o trabalho elementar realizado por  $\mathbf{F}$  em um deslocamento  $d\mathbf{u}$  é

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{u} = |\mathbf{F}| |d\mathbf{u}| \cos \theta.$$

O trabalho realizado por um momento  $M$  entre  $t_i$  e  $t_f$  é dado por

$$W = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{P} dt = \int_{t_i}^{t_f} M\dot{\varphi} dt = \int_{\varphi_i}^{\varphi_f} M(\varphi) d\varphi. \quad (14)$$

**Exemplo 2** Para a viga de comportamento elástico linear da Fig. E2, determine o trabalho externo realizado quando uma força  $P$ , variando de 0 a  $P_f$ , é aplicada gradualmente.

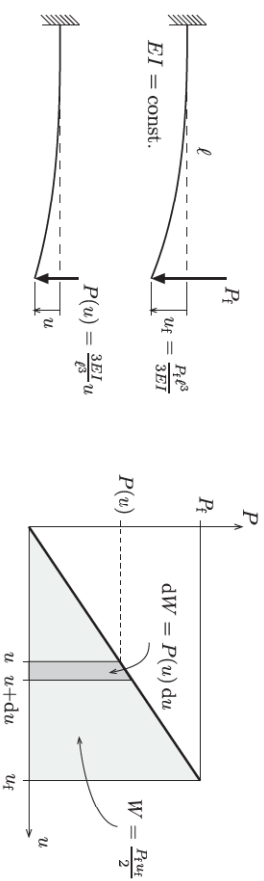


Fig. E2: Viga em balanço.

**SOLUÇÃO** Conhecida a expressão do deslocamento final na extremidade da viga, é fácil expressar a força  $P$  em função do deslocamento transversal  $u$ ,

$$P(u) = \frac{3EI}{l^3}u,$$

e escrever a expressão do trabalho realizado,

$$W_{\text{ext}} = \int_0^{u_f} P(u) du = \int_0^{u_f} \frac{3EI}{l^3}u du = \frac{3EI}{l^3} \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^{u_f} = \frac{1}{2} \left( \frac{3EIu_f}{l^3} \right) u_f = \frac{P_f u_f}{2}.$$

Portanto, o trabalho realizado é igual à área do triângulo sob o diagrama força-deslocamento e o dois no denominador decorre da linearidade entre força e deslocamento.

## 2 Energia de Deformação

Duas formulações se destacam na Mecânica das Estruturas: a formulação direta ou Newtoniana e a formulação em energia ou Lagrangiana. Na formulação direta, as estruturas reticuladas são decompostas em elementos de barra. Os esforços de interação entre as barras assim como os deslocamentos e rotações de suas ligações são tratados como incógnitas mesmo quando eles não são as grandezas procuradas. As equações de equilíbrio e compatibilidade são escritas na forma vetorial e envolvem equações diferenciais.

Na formulação em energia, o comportamento mecânico continua sendo descrito por um sistema de equações que engloba equações constitutivas, de equilíbrio e de compatibilidade. Contudo, a formulação sistematiza a obtenção das equações de equilíbrio e de compatibilidade de modo a minimizar o número de esforços e deslocamentos incógnitos envolvidos na resolução. A formulação é particularmente adequada para tratar sólidos deformáveis e lidar

com problemas envolvendo restrições cinemáticas internas.

## 2.1 Definição

Quando uma estrutura submetida a um carregamento estático<sup>3</sup> conservativo<sup>4</sup>, os esforços externos realizam trabalho visto que seus pontos de aplicação sofrem deslocamentos decorrentes da deformação da estrutura. Se o processo termodinâmico for isotérmico e reversível, a conservação de energia assegura que a energia interna armazenada pela estrutura,  $\mathcal{U}$ , seja igual ao trabalho realizado pelos esforços externos,  $W_{\text{ext}}$ ,

$$\mathcal{U} = W_{\text{ext}}.$$

Esta energia armazenada, que num corpo elástico tem a capacidade de restituí-lo à configuração indeformada uma vez cessado o carregamento, recebe o nome de energia de deformação.

**Definição 1** A energia de deformação representa a capacidade dos esforços internos (esforços solicitantes ou tensões) realizarem trabalho em virtude do estado de deformação da estrutura.

**Teorema 1 (Clapeyron)** A energia de deformação de uma estrutura linear solicitada por um carregamento estático conservativo é igual à metade do trabalho que os esforços externos realizariam se os respectivos deslocamentos finais fossem simultaneamente pela aplicação de todos os esforços com seus valores finais. Portanto,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i d_i, \quad (15)$$

em que  $n$  é o número de esforços externos,  $P_i$  valor final do esforço externo  $i$ , e  $d_i$  valor final da componente de deslocamento do ponto de aplicação na direção do esforço  $P_i$ .

**PROVA** Em um carregamento proporcional genérico de uma estrutura linear, todos os esforços atingem uma fração  $\lambda$  de seu valor final  $P_i$ , com  $0 \leq \lambda \leq 1$ , quando os correspondentes deslocamentos assumem valores  $\lambda d_i$ , Fig. 7.

<sup>3</sup>Carregamento aplicado lenta e gradualmente em que as forças de inércia mobilizadas são desprezíveis.

<sup>4</sup>Carregamento formado por esforços externos conservativos. Um esforço é dito conservativo quando o trabalho realizado entre dois pontos independe da trajetória percorrida.

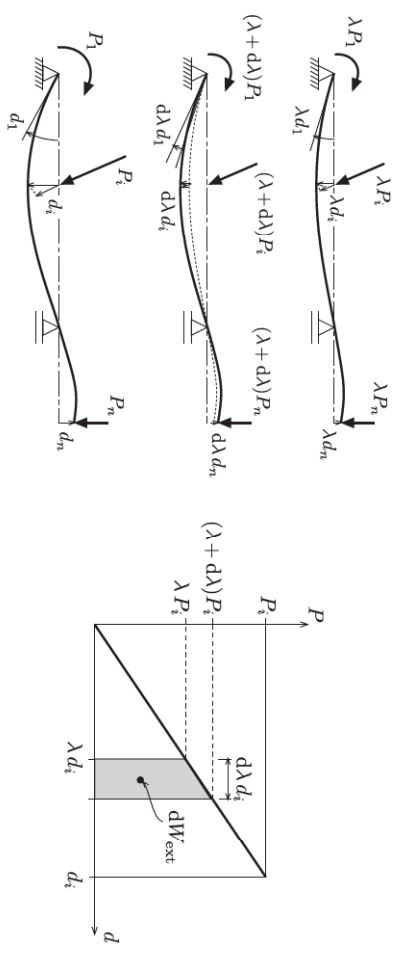


Fig. 7: Carregamento proporcional.

Acréscimos  $d\lambda P_i, i = 1 \dots n$ , do carregamento provocam acréscimos de deslocamento  $d\lambda d_i$  e a seguinte parcela do trabalho externo:

$$dW_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^n (\lambda + \frac{d\lambda}{2}) P_i d\lambda d_i = \sum_{i=1}^n \left[ P_i d_i \lambda d\lambda + \frac{1}{2} P_i d_i (d\lambda)^2 \right].$$

Desprezando-se infinitesimos de ordem superior e integrando de  $\lambda = 0$  a 1 (condições inicial e final, respectivamente),

$$W_{\text{ext}} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n P_i d_i \lambda d\lambda = \sum_{i=1}^n P_i d_i \left[ \frac{\lambda^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i d_i.$$

Para um sistema conservativo, a igualdade  $\mathcal{U} = W_{\text{ext}}$  fornece

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i d_i. \quad \square$$

**Nota 1** A energia de deformação  $\mathcal{U}$  pode ser calculada tanto a partir dos esforços internos quanto dos esforços externos quando se conhecem os deslocamentos dos pontos de aplicação.

**Nota 2** A Eq. (15) pode ser generalizada para incluir o trabalho dos esforços externos distribuídos,

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i d_i + \frac{1}{2} \sum_{b=1}^{n_b} \int_0^{d_b} p_b(x) d_b(x) dx,$$

onde  $n_b$  é o número de barras,  $p_b(x)$  e  $d_b(x)$  são, respectivamente, a carga distribuída e a projeção do deslocamento na direção da carga ao longo da barra  $b$ .

**Nota 3** A superposição de efeitos não se verifica para a energia de deformação. Dada uma estrutura submetida a um sistema de esforços, é fácil mostrar que a energia de deformação é diferente da soma das energias de deformação para cada força aplicada separadamente, como ilustrado na Fig. 8. O termo  $P_1 d_{12}$  é denominado *trabalho cruzado*.

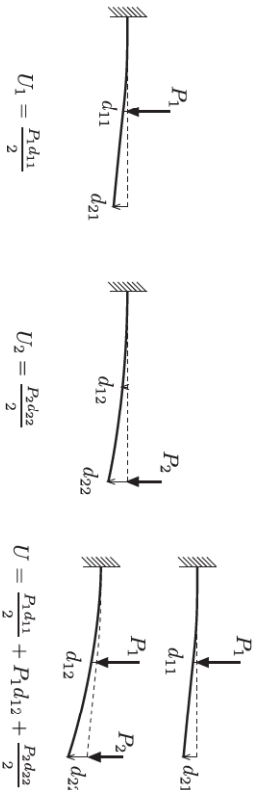


Fig. 8: Não-validade da superposição de energia.

## 2.2 Energia de Deformação de um Sólido

Como as tensões são forças distribuídas externas ao paralelepípedo infinitesimal da Fig. 9, podemos usar o teorema de Clapeyron para calcular a energia de deformação.

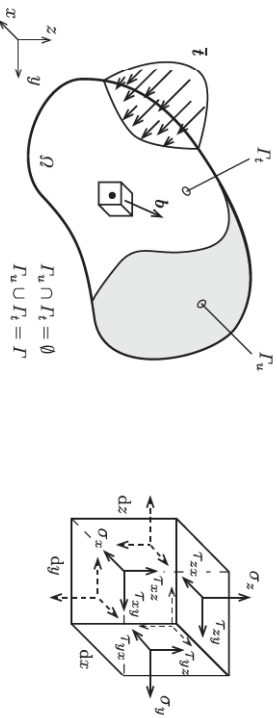


Fig. 9: Componentes de tensão na face to paralelepípedo.

Inicialmente calculamos o trabalho realizado pelas resultantes de todas as tensões impondo a deformação linear  $\epsilon_y$  dada pela Eq. (2)<sub>2</sub>, conforme mostra na Fig. 10-a. A vinculação adotada impede movimentos de corpo rígido visando facilitar esse cálculo. A resultante  $\sigma_y dx dz$ ,

associada à tensão indicada com a seta cheia, realiza o seguinte trabalho:

$$dW^{\epsilon_y} = \frac{1}{2} (\sigma_y dx dz) \epsilon_y dy = \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y dV.$$

Os trabalhos das resultantes de  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{zy}$ , com sentidos contrários nas faces opostas, se cancelam dois a dois. E as resultantes das demais tensões, algumas não indicadas na figura, ou são perpendiculares ao deslocamento ou têm ponto de aplicação com deslocamento nulo.

Impondo a distorção  $\gamma_{yz}$  expressa pela Eq. (3)<sub>3</sub> e mostrada na Fig. 10-b, a resultante  $\tau_{yz} dy dz$  realiza o seguinte trabalho:

$$dW^{\gamma_{yz}} = \frac{1}{2} (\tau_{yz} dx dz) \gamma_{yz} dy = \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} dV.$$

Os trabalhos das resultantes de  $\sigma_z$  e  $\tau_{xz}$  em faces opostas se cancelam e as resultantes das demais tensões, não indicadas na figura, ou são perpendiculares ao deslocamento ou têm ponto de aplicação com deslocamento nulo.

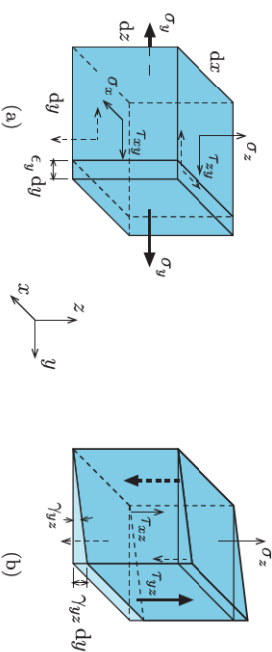


Fig. 10: Trabalho realizado pelas tensões nas deformações (a)  $\epsilon_y$ , (b)  $\gamma_{yz}$ . Face esquerda vinculada na direção  $y$  com o centro da face fixado nas demais direções.

Procedendo de forma análoga com as demais deformações e somando todos os trabalhos realizados, obtemos o trabalho elementar

$$dW = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV,$$

o qual é igual à energia de deformação  $dU$  armazenada no paralelepípedo num sistema conservativo.

Definindo a *energia de deformação específica* ou *densidade de energia de deformação* como

a energia de deformação por unidade de volume do sólido, resulta

$$u = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}), \quad (16)$$

ou em termos das tensões e deformações principais,

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3). \quad (17)$$

No caso de um material isotrópico e elástico linear, é válida a forma generalizada da Lei de Hooke expressa pelas Eqs. (2) e (3), o que possibilita expressar a densidade em função apenas das tensões,

$$u(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1+\nu}{E} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \quad (18)$$

ou em função das deformações,

$$u(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) = \frac{\nu G}{1-2\nu} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)^2 + G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2). \quad (19)$$

Finalmente, empregando as tensões ou as deformações principais,

$$u(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1), \quad (20)$$

$$u(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = \frac{\nu G}{1-2\nu} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)^2 + G(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2). \quad (21)$$

### 2.3 Decomposição da Energia de Deformação

Todo estado de tensão em um ponto pode ser decomposto em um estado esférico ou hidrostático de tensão e em outro antisférico ou ‘deviatorico,’ conforme ilustra a Fig. 11

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & & \\ & \sigma_m & \\ & & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} - \sigma_m & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^e + \mathbf{T}^a, \quad (22)$$

em que  $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$  designa a *tensão normal média*, e  $\mathbf{T}^e$  e  $\mathbf{T}^a$  denotam as partes esférica e antisférica do tensor das tensões  $\mathbf{T}$ .

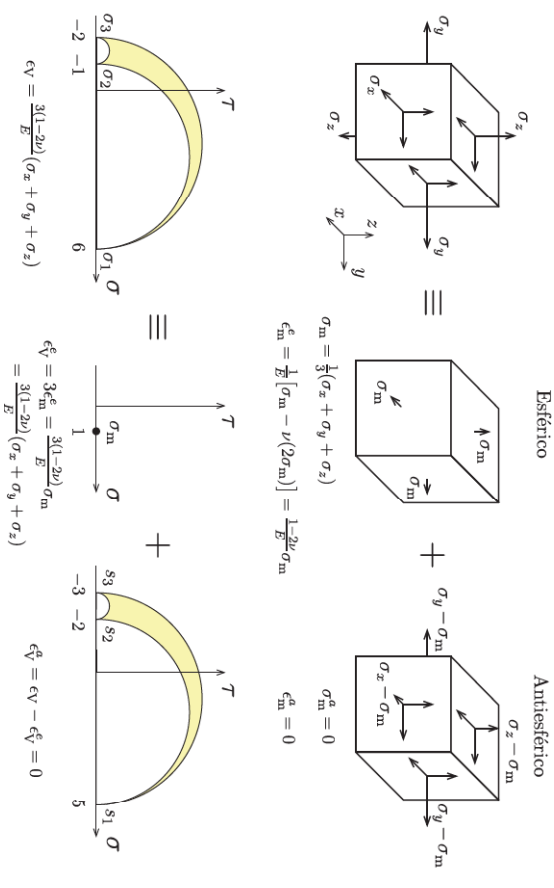


Fig. 11: Decomposição do estado de tensão.

O estado de deformação no ponto também admite uma decomposição análoga,

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_m & & \\ & \epsilon_m & \\ & & \epsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y - \epsilon_m & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z - \epsilon_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a, \quad (23)$$

em que  $\epsilon_m = (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)/3$  designa a *deformação linear média*, e  $\mathbf{E}^e$  e  $\mathbf{E}^a$  denotam as partes esférica e antisférica do tensor das deformações  $\mathbf{E}$ .

O estado de deformação e sua parte esférica apresentam a mesma deformação volumétrica<sup>5</sup>,

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = 3\epsilon_m, \quad \epsilon_v^e = \epsilon_m + \epsilon_m + \epsilon_m = 3\epsilon_m.$$

Esta observação e o fato da deformação  $\epsilon_m^e$  ser a mesma em qualquer direção na parte esférica permitem concluir que a parte esférica  $\mathbf{T}^e$  do tensor das tensões é responsável pela mudança de volume e sua parte antisférica  $\mathbf{T}^a$ , pela mudança de forma no caso de um material isotrópico elástico linear.

A importância da decomposição aditiva do estado de tensão descrita acima nos critérios

<sup>5</sup> A parte inferior da Fig. 11 mostra que a igualdade pode ser deduzida a partir da decomposição do estado de tensão no caso de um material isotrópico e elástico linear.



de resistência justifica uma decomposição semelhante da energia de deformação<sup>6</sup>,

$$u = u^e + u^a. \quad (24)$$

em que  $u^e$  é a *densidade de energia de deformação esférica* ou *volumétrica*, e  $u^a$  a *antiesférica* ou *de distorção*.

A dedução simplifica-se quando realizada na base própria formada pelas direções principais,  $(h_1, h_2, h_3)$ . Nessa base, as componentes fora da diagonal são nulas, e as Eqs. (22) e (23) se reduzem a

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & & \\ & \sigma_2 - \sigma_m & \\ & & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ \epsilon_m \\ \epsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_m & & \\ & \epsilon_2 - \epsilon_m & \\ & & \epsilon_3 - \epsilon_m \end{bmatrix}. \quad (26)$$

em que  $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  e  $\epsilon_m = (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)/3 = \epsilon_V/3$ .

No caso de um material elástico linear, a deformação média pode ser expressa em função das tensões empregando as Eqs. (2) expressas na nova base,

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)], \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)], \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Como a tensão aparece ao quadrado no integrando da Eq. (18), a decomposição é viável em virtude dos trabalhos cruzados, ou seja trabalho realizado por uma parte do estado de tensão na deformação produzida pela outra parte, serem nulos. Empregando a notação tensorial, temos

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \mathbf{T} : \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{T}^e + \mathbf{T}^a) : (\mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{T}^e : \mathbf{E}^e)}_{2u^e} + \underbrace{\mathbf{T}^a : \mathbf{E}^e}_0 + \underbrace{\mathbf{T}^e : \mathbf{E}^a}_0 + \underbrace{\mathbf{T}^a : \mathbf{E}^a}_{2u^a} \\ &= u^e + u^a. \end{aligned}$$

A soma dessas equações e posterior divisão por três fornece

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3} = \frac{1}{E} [\sigma_m - \nu(\sigma_m + \sigma_m)] = \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_m.$$

O emprego da Eq. (17) fornece a energia de deformação esférica,

$$u^e = \frac{1}{2} (3\sigma_m \epsilon_m) = \frac{3(1 - 2\nu)}{2E} \sigma_m^2 \quad (27)$$

ou ainda,

$$u^e = \frac{(1 - 2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (28)$$

A parcela antiesférica é obtida substituindo as componentes dos tensores antiesféricos das Eqs. (25) e (26) na Eq. (17). Ela também pode ser obtida a partir das Eqs. (24) e (27),

$$u^a = u - u^e = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3 - 3\sigma_m \epsilon_m).$$

O desenvolvimento do primeiro produto,

$$\frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2} = \frac{\sigma_1}{2E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 - \nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3 \sigma_1)],$$

permite que se deduza a expressão final usando a permutação cíclica nos índices 1, 2 e 3 e fazendo uso da Eq. (28):

$$\begin{aligned} u^a &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] - \frac{1 - 2\nu}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \\ &= \frac{1}{2E} \left[ \frac{2(1 + \nu)}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{2(1 + \nu)}{3} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right] \\ &= \frac{2(1 + \nu)}{6E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1], \end{aligned}$$

ou ainda,

$$u^a = \frac{(1 + \nu)}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (29)$$

A dedução das expressões em uma base ortonormal arbitrária é análoga a anterior no que se refere às componentes  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\sigma_z$ , bastando acrescentar o termo referente às tensões tangenciais

da Eq. (18) à parte anti esférica,

$$u^e = \frac{(1-2\nu)}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2. \quad (30)$$

$$u^a = \frac{(1+\nu)}{6E} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (31)$$

## 2.4 Energia de Deformação de uma Barra

### 2.4.1 Flexão Normal Composta

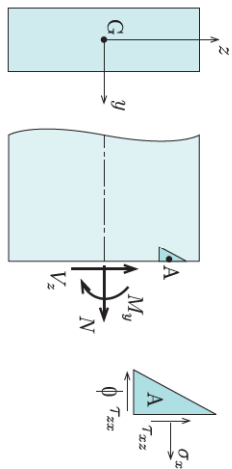


Fig. 12: Convenção de sinais na flexão normal composta.

Quando a flexão ocorre no plano  $xz$ , os pontos da barra estão sujeitos a um estado de tensão caracterizado pelas tensões  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  na seção transversal e tensão normal desprezível nos planos longitudinais, conforme mostrado na Fig. 12,

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z, \quad \tau_{xz} = \frac{V_z \bar{S}_y}{b_y I_y},$$

com o eixo central  $z$  orientado para o lado traçado por  $M_y$  positivo. Assim, a densidade da energia de deformação expressa pela Eq. 18 se resume a

$$u = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\tau_{xz}^2}{2G}.$$

Introduzindo as tensões, resulta

$$u = \frac{1}{2E} \left( \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z \right)^2 + \frac{1}{2G} \left( \frac{V_z \bar{S}_y}{b_y I_y} \right)^2.$$

A energia de deformação da barra é obtida integrando-se  $u$  no volume da barra, ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int_V u \, dV = \int_\ell \int_A \left[ \frac{1}{2E} \left( \frac{N^2}{A^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2} z^2 + \frac{2NM_y}{AI_y} z \right) + \frac{1}{2G} \left( \frac{V_z^2 \bar{S}_y^2}{b_y^2 I_y^2} \right) \right] dA \, dx \\ &= \int_\ell \left[ \frac{N^2}{2EA^2} \int_A dA + \frac{M_y^2}{2EI_y^2} \int_A z^2 dA + \frac{NM_y}{EA I_y} \int_A z dA + \frac{V_z^2}{2GA} \frac{A}{I_y^2} \int_A \left( \frac{\bar{S}_y}{b_y} \right)^2 dA \right] dx. \end{aligned}$$

Cancelando a primeira integral com a área no denominador e a segunda com o momento de inércia, e lembrando que os momentos estáticos são nulos em relação aos eixos centrais, chegamos a

$$\mathcal{U} = \int_\ell \left[ \frac{N^2}{2EA} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{\kappa_z V_z^2}{2GA} \right] dx, \quad (32)$$

em que  $\kappa_z$  é um coeficiente de forma que considera a distribuição não uniforme das tensões tangenciais na seção,

$$\kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \left( \frac{\bar{S}_y}{b_y} \right)^2 dA. \quad (33)$$

O uso da fórmula acima fornece  $\kappa_z = \frac{6}{5}$  para uma seção retangular;  $\frac{10}{9}$  para uma circular e 2 para uma seção anelar delgada.

Recordando as equações constitutivas da barra,

$$\epsilon_x = \frac{N}{EA}, \quad v'' = \frac{M_y}{EI_y}, \quad \gamma_z = \frac{\kappa_z V_z}{GA},$$

chegamos à expressão,

$$\mathcal{U} = \int_\ell \left[ \frac{N\epsilon_x}{2} + \frac{M_y v''}{2} + \frac{V_z \gamma_z}{2} \right] dx, \quad (34)$$

a qual corresponde ao trabalho realizado pelos esforços solitantes nos respectivas deformações, como indicado na Fig. 13.

### 2.4.2 Flexão Obliqua Composta

Os pontos da barra estão sujeitos a um estado de tensão caracterizado pelas tensões  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$  na seção transversal e tensão normal nula nos planos longitudinais,

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z, \quad \tau_{xy} = \frac{V_y \bar{S}_z}{b_y I_z}, \quad \tau_{xz} = \frac{V_z \bar{S}_y}{b_y I_y},$$

com os eixos centrais  $y$  e  $z$  orientados para o lado que os momentos  $M_z$  e  $M_y$  positivos traionam. A eliminação dos termos nulos na Eq. 18 fornece

$$u = \frac{\sigma_x^2}{2E} + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} + \frac{\tau_{xz}^2}{2G}.$$

Introduzindo as expressões das tensões na seção<sup>7</sup>, obtemos

$$u = \frac{1}{2E} \left( \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \right)^2 + \frac{1}{2G} \left( \frac{V_y \bar{S}_z}{b_z I_z} \right)^2 + \frac{1}{2G} \left( \frac{V_z \bar{S}_y}{b_y I_y} \right)^2.$$

A energia de deformação da barra é obtida integrando-se  $u$  no volume da barra, ou seja

$$\begin{aligned} U &= \int_V u \, dV \\ &= \int_\ell \iint_A \left[ \frac{1}{2E} \left( \frac{N^2}{A^2} + \frac{M_z^2}{I_z^2} y^2 + \frac{M_y^2}{I_y^2} z^2 + \frac{2NM_z}{AI_z} y + \frac{2NM_y}{AI_y} z + \frac{2M_y M_z}{I_y I_z} yz \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2G} \left( \frac{V_y^2 \bar{S}_z^2}{b_z^2 I_z^2} \right) + \frac{1}{2G} \left( \frac{V_z^2 \bar{S}_y^2}{b_y^2 I_y^2} \right) \right] dA \, dx \\ &= \int_\ell \left[ \frac{1}{2EA^2} \int_A dA + \frac{M_z^2}{2EI_z^2} \int_A y^2 dA + \frac{M_y^2}{2EI_y^2} \int_A z^2 dA + \frac{NM_z}{EAI_z} \int_A y dA + \frac{NM_y}{EAI_y} \int_A z dA \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_y M_z}{EI_y I_z} \int_A yz dA + \frac{V_y^2}{2GA} \frac{A}{I_z^2} \int_A \left( \frac{\bar{S}_z}{b_z} \right)^2 dA + \frac{V_z^2}{2GA} \frac{A}{I_y^2} \int_A \left( \frac{\bar{S}_y}{b_y} \right)^2 dA \right] dx. \end{aligned}$$

Reconhecendo as três primeiras integrais de área, que também aparecem ao quadrado nos denominadores, e lembrando que os momentos estáticos e o produto de inércia são nulos em relação aos eixos centrais, chegamos a

$$U = \int_\ell \left[ \frac{N^2}{2EA} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{\kappa_y V_y^2}{2GA} + \frac{\kappa_z V_z^2}{2GA} \right] dx, \quad (35)$$

<sup>7</sup>Nas seções delgadas, a tensão tangencial na seção é tangente ao contorno e atua na espessura da parede da seção; o que torna vantajosa a integração das tensões tangenciais ao longo da linha média da paredes da seção. Nesse caso as contribuições de  $V_y$  e  $V_z$  devem ser somadas numa única tensão tangencial:

$$\tau = \frac{1}{b} \left( \frac{V_y \bar{S}_z}{I_z} + \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y} \right),$$

à qual deve ser acrescentada a contribuição do momento de torção no caso de seções uni- e multicelulares.

em que  $\kappa_y$  e  $\kappa_z$  são coeficientes de forma que consideram a distribuição não uniforme das tensões tangenciais na seção,

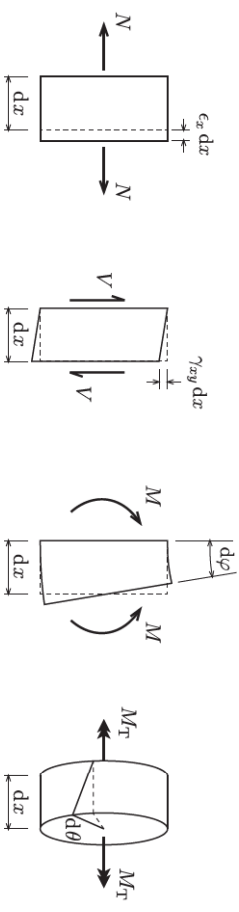
$$\kappa_y = \frac{A}{I_z^2} \int_A \left( \frac{\bar{S}_z}{b_z} \right)^2 dA, \quad \kappa_z = \frac{A}{I_y^2} \int_A \left( \frac{\bar{S}_y}{b_y} \right)^2 dA. \quad (36)$$

### 2.4.3 Caso Geral: Flexão Composta e Torção Uniforme

Por definição, o momento de torção  $M_T$  é calculado em relação ao centro de torção da seção que coincide com o centro de cisalhamento. Como consequência, os trabalhos realizados pelas forças cortantes desacoplam-se do trabalho realizado pelo momento de torção, e a energia de deformação da barra pode ser obtida a partir dos esforços solicitantes que atuam nas extremidades de um trecho de barra de comprimento  $dx$ , como mostra a Fig. 13. Empregando o Teorema de Clapeyron, temos

$$dU = \left[ \frac{N \epsilon_x}{2} + \frac{V_y \gamma_{xy}}{2} + \frac{V_z \gamma_{xz}}{2} + \frac{M_y \frac{d\epsilon_y}{dx}}{2} + \frac{M_z \frac{d\epsilon_z}{dx}}{2} + \frac{M_T \frac{d\theta}{dx}}{2} \right] dx. \quad (37)$$

Introduzindo as relações entre esforços solicitantes e deformações contidas na Fig. 13, e



Equações constitutivas	$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$	$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$	$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$	$\gamma = \frac{\tau}{G}$
	$N = EA \epsilon_x$	$V = GA \gamma_{xy}$	$M = EI_y \phi'$	$M_T = GI_T \theta'$

Tensão na seção	$\sigma_x = \frac{N}{A}$	$\tau_{xy} = \frac{V_y \bar{S}_z}{b_z I_z}$	$\sigma_y = \frac{M}{I_z} y$	$\tau = \frac{M_T}{I_T} r$
	(a)	(b)	(c)	(d)

Fig. 13. Equações constitutivas e relações entre tensão e esforço solicitante para barras solicitadas por (a) força normal, (b) força cortante, (c) momento fletor e (d) momento de torção.

integrando ao longo do comprimento da barra, obtemos a energia de deformação em função

das deformações da barra,

$$U(\epsilon_x, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \varphi'_y, \varphi'_z, \theta) = \int_0^\ell \left[ \frac{EA\epsilon_x^2}{2} + \frac{GA\gamma_{xy}^2}{2\kappa_y} + \frac{GA\gamma_{xz}^2}{2\kappa_z} + \frac{EI_y(\varphi'_y)^2}{2} + \frac{EI_z(\varphi'_z)^2}{2} + \frac{GIT\theta^2}{2} \right] dx, \quad (38)$$

ou em termos dos esforços solicitantes nas seções,

$$U(N, V_y, V_z, M_y, M_z, M_T) = \int_0^\ell \left[ \frac{N^2}{2EA} + \frac{\kappa_y V_y^2}{2GA} + \frac{\kappa_z V_z^2}{2GA} + \frac{M_y^2}{2EI_y} + \frac{M_z^2}{2EI_z} + \frac{M_T^2}{2GIT} \right] dx. \quad (39)$$

### 2.4.4 Exemplos

**Exemplo 3** Calcule a energia de deformação e determine o deslocamento da extremidade para as estruturas da figura.

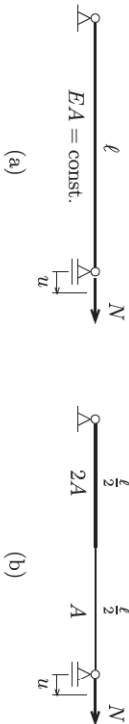


Fig. E3: Solicitação axial.

#### SOLUÇÃO

a) Barra prismática com  $N = \text{const.}$

$$U = \int_0^\ell \frac{N^2}{2EA} dx = \frac{N^2}{2EA} \int_0^\ell dx = \frac{N^2 \ell}{2EA}$$

Igualando a energia de deformação e o trabalho realizado pela força  $N$

$$U = W_{\text{ext}} \Rightarrow \frac{N^2 \ell}{2EA} = \frac{Nu}{2} \Rightarrow u = \frac{N\ell}{EA}$$

b) Empregando a expressão de  $U$  deduzida acima

$$U = \frac{N^2 \frac{\ell}{2}}{2(2EA)} + \frac{N^2 \frac{\ell}{2}}{2EA} = \frac{N^2 \ell}{8EA} + \frac{N^2 \ell}{4EA} = \frac{3N^2 \ell}{8EA}$$

Igualando a energia de deformação e o trabalho realizado pela força  $N$

$$U = W_{\text{ext}} \Rightarrow \frac{3N^2 \ell}{8EA} = \frac{Nu}{2} \Rightarrow u = \frac{3N\ell}{4EA}$$

**Exemplo 4** Calcule a energia de deformação e determine o deslocamento da extremidade para a treliça da figura.

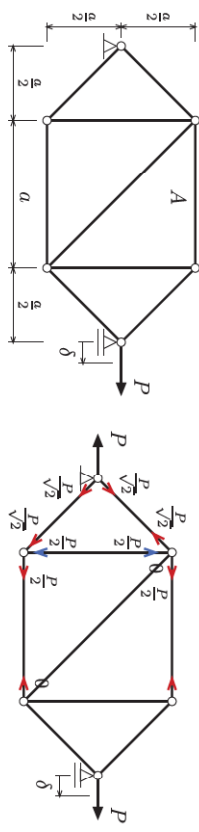


Fig. E4: Treliça.

**SOLUÇÃO**  
Energia de deformação da treliça

$$U = 4 \frac{\left(\frac{P}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{a}{\sqrt{2}}}{2EA} + 4 \frac{\left(\frac{P}{2}\right)^2 a}{2EA} = \frac{P^2 a}{\sqrt{2}EA} + \frac{P^2 a}{2EA} = \frac{(2 + \sqrt{2})P^2 a}{2\sqrt{2}EA}$$

Igualando a energia de deformação e o trabalho realizado pela força  $N$

$$U = W_{\text{ext}} \Rightarrow \delta = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{Pa}{EA}$$

**Exemplo 5** Determine o deslocamento vertical do ponto de aplicação de  $P$  para a viga poligonal da figura

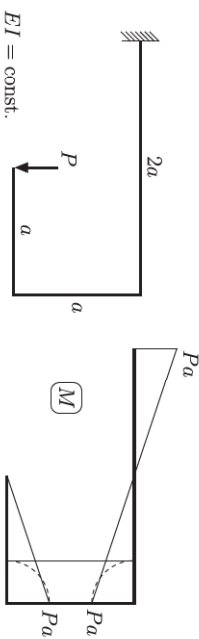


Fig. E5: Viga poligonal.

#### SOLUÇÃO

Três trechos de comprimento  $a$  apresentam o mesmo diagrama linear de momentos

$$U = 3 \int_0^a \frac{(Px)^2}{2EI} dx + \int_0^a \frac{(Pa)^2}{2EI} dx = \frac{3P^2}{2EI} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a + \frac{P^2 a^3}{EI} = \frac{P^2 a^3}{EI}$$

Ignorando a energia de deformação e o trabalho realizado por  $P$

$$U = W_{ext} \Rightarrow \frac{P^2 a^3}{EI} = \frac{Pv}{2} \Rightarrow v = \frac{2Pa^3}{EI} \quad (1)$$

## Referências

- [1] Boreasi, A. P., Schmidt, R. J. and Sidebottom, O. M. *Advanced Mechanics of Materials*. 5th ed., John Wiley & Sons Inc., New York, 1993.
- [2] Crandall, S. H. and Dahl, N. C. and Lardner, Thomas J. *An Introduction to the Mechanics of Solids*. 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1978.
- [3] Diogo, Luiz Antônio Cortese. *Resistência dos Materiais*, Apostila do PEF, São Paulo, 2000.
- [4] Feodosiev, V. I. *Resistencia de Materiales*. 2nd. ed. (espanhol), MIR, Moscow, 1980.
- [5] Oden, J. T. e Ripperger, E. A. *Mechanics of Elastic Structures*. Segunda ed., Hemisphere (McGraw-Hill), Washington, 1981.

## Index

- |                                     |             |
|-------------------------------------|-------------|
| coeficiente                         | trabalho, 9 |
| de empuxo em repouso, 5             | cruzado, 13 |
| coeficiente de Poisson, 2           |             |
| deformação linear média, 16         |             |
| densidade                           |             |
| de energia de deformação, 14        |             |
| densidade de energia de deformação  |             |
| antiesférica, 17                    |             |
| de distorção, 17                    |             |
| esférica, 17                        |             |
| volumétrica, 17                     |             |
| energia                             |             |
| de deformação, 11                   |             |
| de deformação específica, 14        |             |
| lei de Hooke generalizada, 4        |             |
| matriz de elasticidade, 5           |             |
| módulo                              |             |
| de compressibilidade volumétrica, 8 |             |
| de elasticidade, 2                  |             |
| de elasticidade confinado, 5        |             |
| de elasticidade transversal, 2      |             |
| de elasticidade volumétrico, 8      |             |
| potência, 8, 9                      |             |
| tensão normal                       |             |
| esférica, 8                         |             |
| média, 8                            |             |
| tensão normal média, 15             |             |
| teorema                             |             |
| de Clapeyron, 11                    |             |