



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E FUNDAÇÕES

PEF 126 - RESISTÊNCIA DOS MATEIRAIIS E ESTABILIDADE DAS CONSTRUÇÕES II

**TENSÕES NORMAIS E DESLOCAMENTOS
NA FLEXÃO OBLÍQUA.**

Luiz Antonio Cortese Diogo

São Paulo

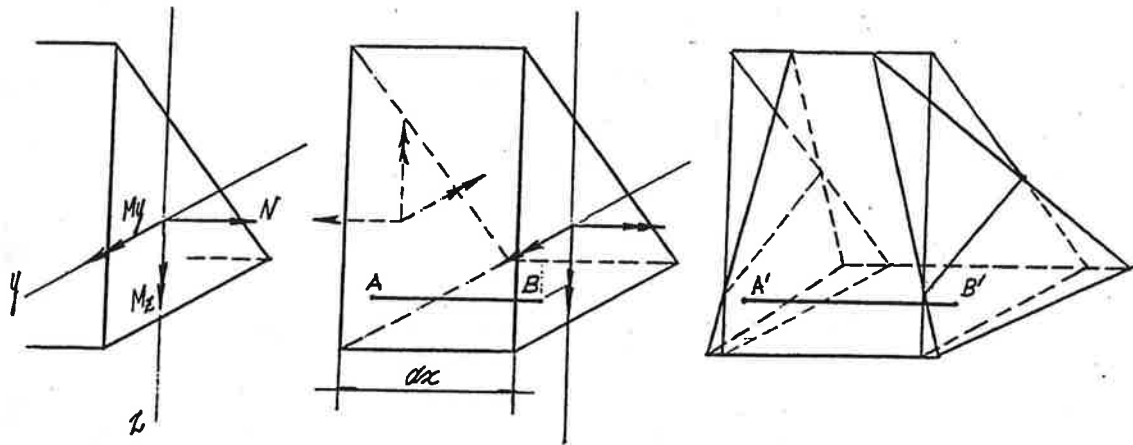
2000

TENSÕES NORMAIS E DESLOCAMENTOS NA FLEXÃO OBLÍQUA.

TENSÕES NORMAIS.

Quando a seção transversal de uma barra é solicitada por momentos fletores M_y e M_z , segundo as direções y e z , e por força normal N , a distribuição de tensões normais σ pode ser obtida considerando, a exemplo do que se fez no estudo da flexão normal, um segmento de dimensão dx na configuração indeformada cujas faces, caracterizadas pelas coordenadas x e $x + dx$, permanecem, de acordo com a hipótese de Navier, planas e perpendiculares ao eixo na configuração deformada.

A força normal N provoca, como se mostra na fig., o afastamento ou a aproximação das seções transversais, enquanto a ação conjunta dos momentos fletores M_y e M_z provoca a rotação das seções transversais segundo os eixos y e z .



A deformação de uma fibra AB , caracterizada pelas coordenadas y e z , é dada por:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (1)$$

onde $A'B'$ é o comprimento final da fibra AB medido pela distância entre os planos das seções transversais na configuração deformada, de modo que se pode escrever:

$$\varepsilon = Ay + Bz + C \quad (2)$$

uma vez que a expressão (1) corresponde à divisão por uma constante AB de uma função linear $A'B'$ de y e z da qual se subtrai a constante AB .

A deformação ε corresponde a tensão normal σ dada, segundo a lei de Hooke, por:

$$\sigma = E\varepsilon = EAy + EBz + EC = A'y + B'z + C \quad (3)$$

isto é, um elemento de dimensão $AB = dx$ e seção transversal dS , solicitado pela força $dN = \sigma dS$, passa a ter, em consequência do alongamento $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, a dimensão $A'B' = AB(1 + \varepsilon)$.

A distribuição de tensões normais σ , correspondem aos seguintes esforços solicitantes:

$$N = \int_S \sigma dS = \int_S (A'y + B'z + C') dS = A' \int_S y dS + B' \int_S z dS + C' \int_S dS$$

$$= A'M_{sz} + B'M_{sy} + C'S \quad (4')$$

$$M_y = \int_S \sigma z dS = \int_S (A'y + B'z + C')z dS = A' \int_S yz dS + B' \int_S z^2 dS + C' \int_S z dS$$

$$= A'I_{yz} + B'I_y + C'M_{sy} \quad (4'')$$

$$M_z = - \int_S \sigma y dS = - \int_S (A'y + B'z + C')y dS = -A' \int_S y^2 dS - B' \int_S yz dS - C' \int_S y dS$$

$$= -A'I_z - B'I_{yz} - C'M_{sz} \quad (4''')$$

Se os eixos y e z são *eixos centrais de inércia* (eixos principais que passam pelo centro de gravidade), em relação aos quais $M_{sy} = M_{sz} = I_{yz} = 0$, resulta:

$$A' = -\frac{M_z}{I_z} \quad B' = \frac{M_y}{I_y} \quad C' = \frac{N}{S} \quad (5)$$

de modo que, de acordo com a expressão (3):

$$\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \quad (6)$$

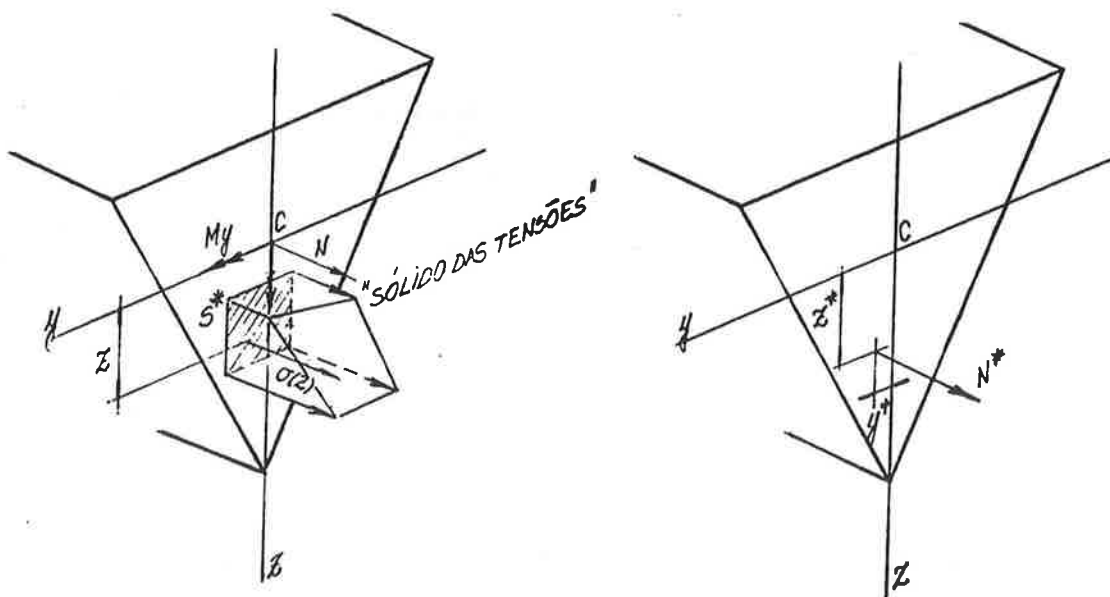
Se os eixos y e z não são *eixos centrais de inércia*, resulta:

$$A' = -\frac{I_{yz}M_y + I_yM_z}{I_zI_y - I_{yz}^2} \quad B' = \frac{I_{yz}M_z + I_zM_y}{I_zI_y - I_{yz}^2} \quad C' = \frac{N}{S} \quad (7)$$

de modo que, de acordo com a expressão (3):

$$\sigma = -\frac{I_{yz}M_y + I_yM_z}{I_zI_y - I_{yz}^2} y + \frac{I_{yz}M_z + I_zM_y}{I_zI_y - I_{yz}^2} z + \frac{N}{S} \quad (8)$$

À distribuição de tensões normais σ em um a região genérica S^* (considerada, por comodidade, retangular na fig.) corresponde a força normal N^* , que pode ser obtida da seguinte maneira:



$$\begin{aligned}
dN^* = \sigma dS \Rightarrow N^* &= \int_{S^*} \sigma dS = \int_{S^*} \left(-\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) dS \\
&= -\frac{M_z}{I_z} \int_{S^*} y dS + \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} z dS + \frac{N}{S} \int_{S^*} dS \\
&= -M_z \frac{M_{sz}^*}{I_z} + M_y \frac{M_{sy}^*}{I_y} + N \frac{S^*}{S}
\end{aligned} \tag{9'}$$

Assim como os momentos M_y^* e M_z^* , que podem ser obtidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
dM_y^* = \sigma z dS \Rightarrow M_y^* &= \int_{S^*} \sigma z dS = \int_{S^*} \left(-\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) z dS \\
&= -\frac{M_z}{I_z} \int_{S^*} yz dS + \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} z^2 dS + \frac{N}{S} \int_{S^*} z dS = \\
&= -M_z \frac{I_{yz}^*}{I_z} + M_y \frac{I_y^*}{I_y} + N \frac{M_{sy}^*}{S}
\end{aligned} \tag{9''}$$

$$\begin{aligned}
dM_z^* = -\sigma y dS \Rightarrow M_z^* &= -\int_{S^*} \sigma y dS = -\int_{S^*} \left(-\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \right) y dS \\
&= \frac{M_z}{I_z} \int_{S^*} y^2 dS - \frac{M_y}{I_y} \int_{S^*} yz dS - \frac{N}{S} \int_{S^*} y dS \\
&= M_z \frac{I_z^*}{I_z} - M_y \frac{I_{yz}^*}{I_y} - N \frac{M_{sz}^*}{S}
\end{aligned} \tag{9'''}$$

onde as grandezas marcadas com asterisco referem-se à região S^* .

Os resultados anteriores permitem considerar a distribuição de tensões normais σ estaticamente equivalente à força N^* aplicada no ponto C^* de coordenadas (y^*, z^*) , tais que:

$$N^* z^* = M_y^* \Rightarrow z^* = \frac{M_y^*}{N^*} = \frac{\int_{S^*} \sigma(z) z dS}{\int_{S^*} \sigma(z) dS} \tag{10'}$$

$$N^* y^* = -M_z^* \Rightarrow y^* = -\frac{M_z^*}{N^*} = \frac{\int_{S^*} \sigma(z) y dS}{\int_{S^*} \sigma(z) dS} \tag{10''}$$

isto é, o ponto C^* de aplicação da força N^* corresponde à projeção no plano da seção transversal do centro de gravidade do "sólido das tensões" relativo à região S^* , cujo volume, segundo a expressão (9'), é igual à força N^* .

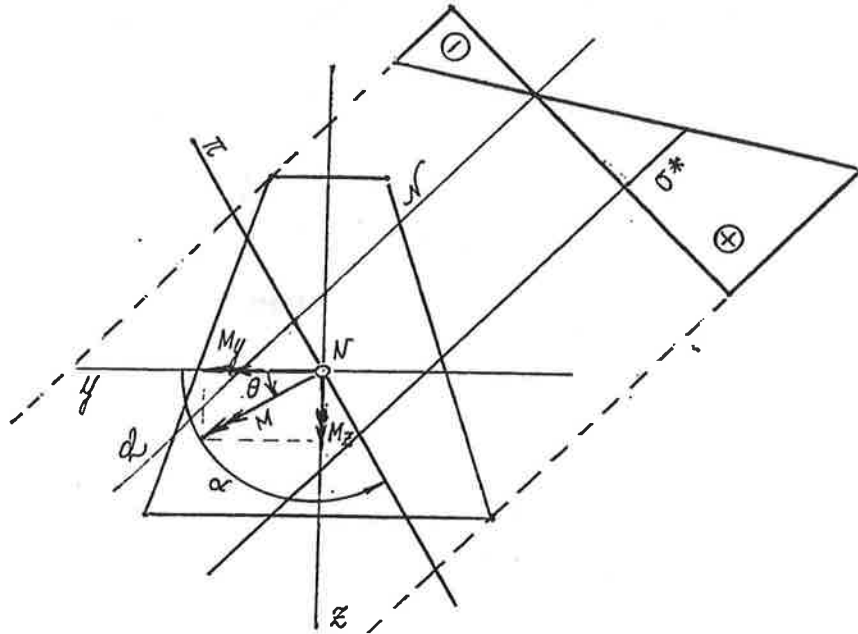
De acordo com a fig., M_y e M_z são dados por:

$$M_y = M \cos \theta = M \cos(\alpha - \pi/2) = M \sin \alpha \quad (11')$$

$$M_z = M \sin \theta = M \sin(\alpha - \pi/2) = -M \cos \alpha \quad (11'')$$

onde α caracteriza o ângulo que o traço do plano de ação de M faz com o eixo y (considerado, assim como o ângulo θ , positivo no sentido de y para z), de modo que:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_y}{M_z} \quad (12)$$



Considerando a expressão (6), verifica-se que $\sigma = 0$ nos pontos (y_0, z_0) de uma reta - denominada *linha neutra* - dada por:

$$z_0 = \tan \alpha_0 y_0 + c_0 \quad (13)$$

onde:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{I_y M_z}{I_z M_y} \quad c_0 = -\frac{I_y N}{S M_y} \quad (14)$$

Os resultados anteriores mostram que na *flexão oblíqua simples* ($N = 0$) a linha neutra, cuja inclinação em relação aos eixos depende dos momentos M_y e M_z , passa pelo centro de gravidade da seção, ao passo que na *flexão oblíqua composta* ($N \neq 0$) há translação da linha neutra, cuja intensidade depende da força normal N .

Considerando-se as expressões (12) e (14), pode-se escrever:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{I_y}{I_z} \quad (15)$$

A expressão anterior permite concluir que, a menos que se tenha $I_y = I_z$,

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha_0 \neq 0$$

isto é, a linha neutra faz com o traço do plano de ação de M um ângulo diferente de 90° .

Considerando, mais uma vez, a expressão (6), verifica-se que $\sigma = \sigma^*$ nos pontos de coordenadas (y^*, z^*) de uma reta dada por:

$$z^* = \frac{I_y}{I_z} \frac{M_z}{M_y} y^* + \frac{I_y}{M_y} \left[\sigma^* - \frac{N}{S} \right] = \operatorname{tg} \alpha_0 y^* + c^* \quad (16)$$

A expressão anterior permite concluir que nos pontos pertencentes a uma reta paralela à linha neutra a tensão normal tem o mesmo valor, e que os pontos mais afastados da linha neutra são os mais solicitados, visto que, em valor absoluto, c^* cresce com σ^* .

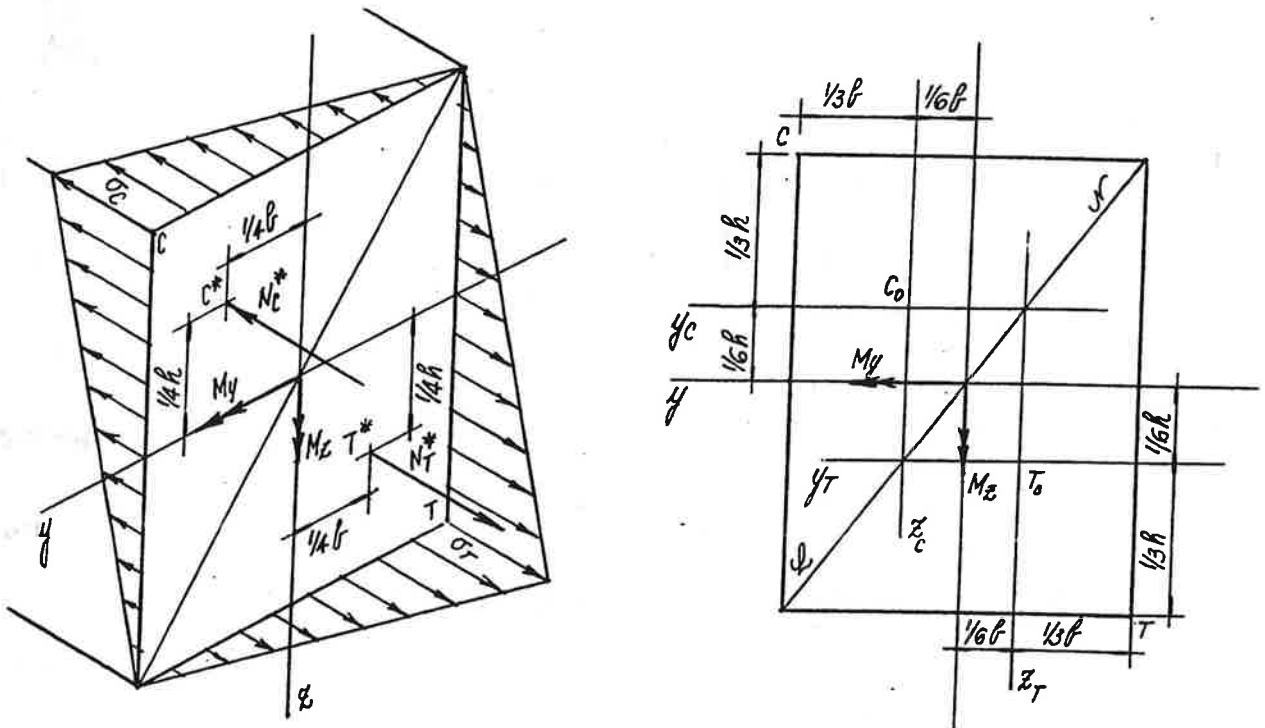
Para determinar a máxima tensão de tração σ_T e a máxima tensão de compressão σ_C basta substituir as coordenadas dos pontos P' e P'' (que são, como se mostra na fig., os pontos onde as retas r' e r'' , paralelas à linha neutra, tangenciam a seção transversal) na expressão (6).

No caso indicado na fig., é fácil ver que o ponto P' - simultaneamente tracionado pelos momentos M_y e M_z - é o mais tracionado, enquanto o ponto P'' - simultaneamente comprimido pelos momentos M_y e M_z - é o mais comprimido.

EXEMPLO 1.

Dada a seção da fig., solicitada por momentos fletores $M_y = M^*$ e $M_z = \frac{b}{h} M^*$, determinar:

- a máxima tensão de tração σ_T e a máxima tensão de compressão σ_C .
- a resultante N^* das tensões normais na região tracionada e na região comprimida, bem como as coordenadas (y^*, z^*) do ponto de aplicação de N^* .



Tratando-se de flexão oblíqua simples, a distribuição de tensões normais é dada por:

$$\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (A)$$

onde:

$$M_y = M^* \quad M_z = \frac{b}{h} M^* \quad I_y = \frac{bh^3}{12} \quad I_z = \frac{hb^3}{12} \quad (B)$$

de modo que:

$$\sigma = -12 \frac{M^*}{b^2 h^2} y + 12 \frac{M^*}{bh^3} z \quad (C)$$

A linha neutra, obtida igualando a zero a expressão anterior, é dada por:

$$z_0 = \frac{h}{b} y_0 \quad (D)$$

No ponto T de coordenadas $(-\frac{1}{2}b, +\frac{1}{2}h)$ – tracionado simultaneamente pelos momentos M_y e M_z – tem-se a máxima tensão de tração, dada por:

$$\sigma_T = 6 \frac{M^*}{bh^2} + 6 \frac{M^*}{bh^2} = 12 \frac{M^*}{bh^2} \quad (E)$$

No ponto C de coordenadas $(+\frac{1}{2}b, -\frac{1}{2}h)$ – comprimido simultaneamente pelos momentos M_y e M_z – tem-se a máxima tensão de compressão, dada por:

$$\sigma_C = -6 \frac{M^*}{bh^2} - 6 \frac{M^*}{bh^2} = -12 \frac{M^*}{bh^2} = -\sigma_T \quad (F)$$

No cálculo dos momentos estáticos, dos momentos de inércia e do produto de inércia correspondentes à região tracionada e à região comprimida, usam-se as fórmulas de translação de eixos, de modo que, sendo:

$$y_{T0} = -\frac{1}{6}b \quad z_{T0} = +\frac{1}{6}h \quad (G')$$

$$y_{C0} = +\frac{1}{6}b \quad z_{C0} = -\frac{1}{6}h \quad (G'')$$

tem-se:

$$\begin{aligned} M_{sy}^{*(T)} &= 0 + (+\frac{1}{6}h)(\frac{1}{2}bh) = \frac{1}{12}bh^2 \\ M_{sz}^{*(T)} &= 0 + (-\frac{1}{6}b)(\frac{1}{2}bh) = -\frac{1}{12}b^2h \\ I_y^{*(T)} &= \frac{1}{36}bh^3 + (+\frac{1}{6}h)^2(\frac{1}{2}bh) = \frac{1}{24}bh^3 \\ I_z^{*(T)} &= \frac{1}{36}b^3h + (-\frac{1}{6}b)^2(\frac{1}{2}bh) = \frac{1}{24}b^3h \\ I_{yz}^{*(T)} &= \frac{1}{72}b^2h^2 + (-\frac{1}{6}b)(+\frac{1}{6}h)(\frac{1}{2}bh) = 0 \end{aligned} \quad (H')$$

$$\begin{aligned} M_{sy}^{*(C)} &= 0 + (-\frac{1}{6}h)(\frac{1}{2}bh) = -\frac{1}{12}bh^2 \\ M_{sz}^{*(C)} &= 0 + (+\frac{1}{6}b)(\frac{1}{2}bh) = \frac{1}{12}b^2h \\ I_y^{*(C)} &= \frac{1}{36}bh^3 + (-\frac{1}{6}h)^2(\frac{1}{2}bh) = \frac{1}{24}bh^3 \\ I_z^{*(C)} &= \frac{1}{36}b^3h + (+\frac{1}{6}b)^2(\frac{1}{2}bh) = \frac{1}{24}b^3h \\ I_{yz}^{*(C)} &= \frac{1}{72}b^2h^2 + (+\frac{1}{6}b)(-\frac{1}{6}h)(\frac{1}{2}bh) = 0 \end{aligned} \quad (H'')$$

Substituindo nas expressões (9) os valores dos esforços solicitantes, dos momentos estáticos, dos momentos de inércia e do produto de inércia, dados pelas expressões (B) e (H), obtém-se:

$$N_T^* = 2 \frac{M^*}{h} \quad M_{yT}^* = \frac{M^*}{2} \quad M_{zT}^* = \frac{b}{h} \frac{M^*}{2} \quad (I')$$

$$N_C^* = -2 \frac{M^*}{h} \quad M_{yC}^* = \frac{M^*}{2} \quad M_{zC}^* = \frac{b}{h} \frac{M^*}{2} \quad (I'')$$

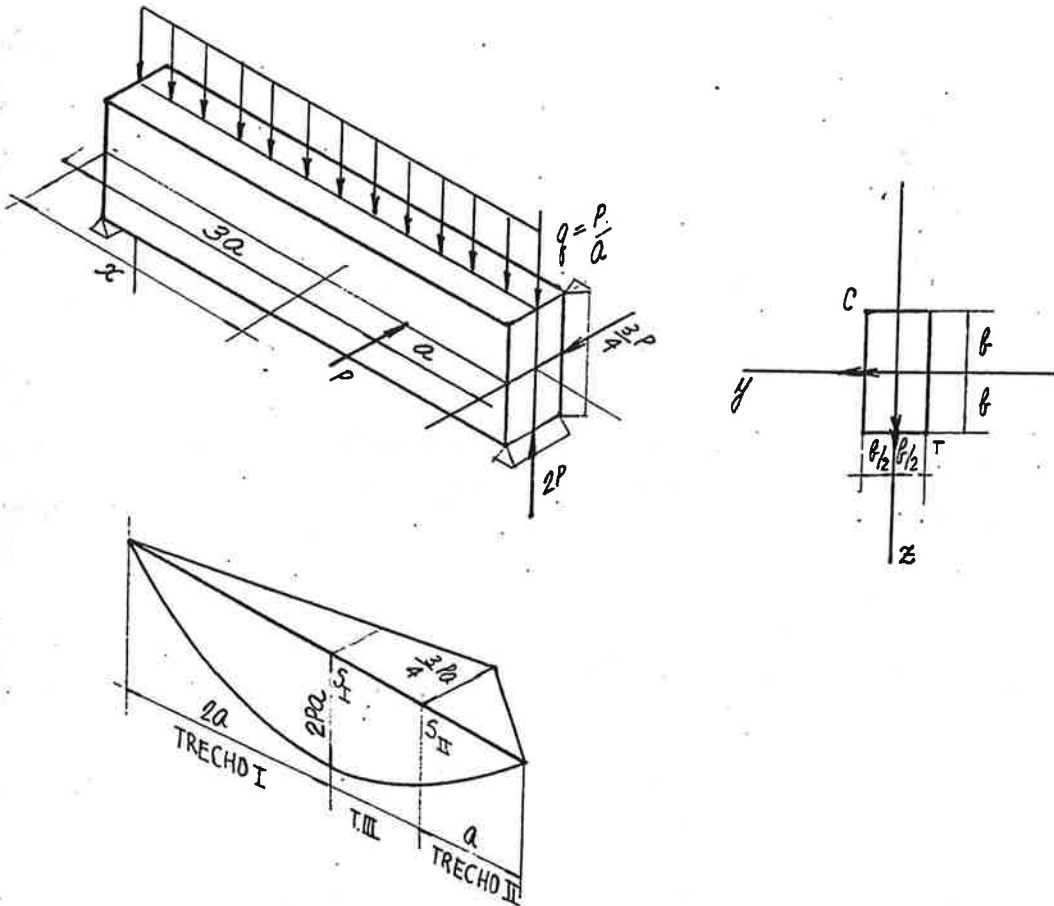
de modo que, de acordo com as expressões (10):

$$y_T^* = -\frac{1}{4}b \quad z_T^* = +\frac{1}{4}h \quad (J')$$

$$y_C^* = +\frac{1}{4}b \quad z_C^* = -\frac{1}{4}h \quad (J'')$$

EXEMPLO 2.

Determinar a máxima tensão de tração σ_{TMAX} e a máxima tensão de compressão σ_{CMAX} na viga da fig.



Analisando o diagrama de momentos fletores, conclui-se, visto que a seção transversal é constante, que no trecho I a seção mais solicitada é a seção S_I (já que os momentos fletores M_y e M_z são simultaneamente maiores do que nas demais seções do trecho), e que no trecho II a seção mais solicitada é a seção S_{II} .

No trecho III o momento M_y decresce enquanto o momento M_z cresce, o que obriga a que se considere uma seção genérica desse trecho, caracterizada pela coordenada x , na qual os esforços solicitantes são dados por:

$$M_y = \left[2Px - \frac{Px^2}{2a} \right] \quad M_z = \frac{Px}{4} \quad (A)$$

Tratando-se de flexão oblíqua simples, a distribuição de tensões normais é dada por:

$$\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z \quad (B)$$

onde:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{2}{3}b^4 \quad I_z = \frac{hb^3}{12} = \frac{1}{6}b^4 \quad (C)$$

Substituindo na expressão (B) os valores de M_y e M_z dados pelas expressões (A), bem como os valores de I_y e I_z dados pelas expressões (C), obtém-se:

$$\sigma = -\frac{3 P_{xy}}{2 b^4} + \frac{3}{2} \left[2Px - \frac{Px^2}{2a} \right] \frac{z}{b^4} \quad (D)$$

No ponto T de coordenadas $(-\frac{1}{2}b, +b)$ – tracionado simultaneamente pelos momentos M_y e M_z – tem-se a máxima tensão de tração, dada por:

$$\sigma_T = \frac{3 P_x}{4 b^3} + \frac{3 P}{2 b^3} \left[2x - \frac{x^2}{2a} \right] \quad (E)$$

No ponto C de coordenadas $(+\frac{1}{2}b, -b)$ – comprimido simultaneamente pelos momentos M_y e M_z – tem-se a máxima tensão de compressão, dada por:

$$\sigma_C = -\frac{3 P_x}{4 b^3} - \frac{3 P}{2 b^3} \left[2x - \frac{x^2}{2a} \right] = -\sigma_T \quad (F)$$

Por serem σ_T e σ_C funções de x , determina-se, por derivação das expressões (E) e (F), as seções em que se tem valores máximos, isto é:

$$\frac{d\sigma_T}{dx} = 0 \Rightarrow x_{TMAX} = \frac{5}{2}a \quad (G')$$

$$\frac{d\sigma_C}{dx} = 0 \Rightarrow x_{CMAX} = \frac{5}{2}a \quad (G'')$$

Substituindo nas expressões (E) e (F) os valores de x dados pelas expressões (G') e (G''), obtém-se:

$$\sigma_{TMAX} = \max(\sigma_T) = \sigma_T(x = x_{TMAX}) = \frac{75 Pa}{16 b^3} \quad (H')$$

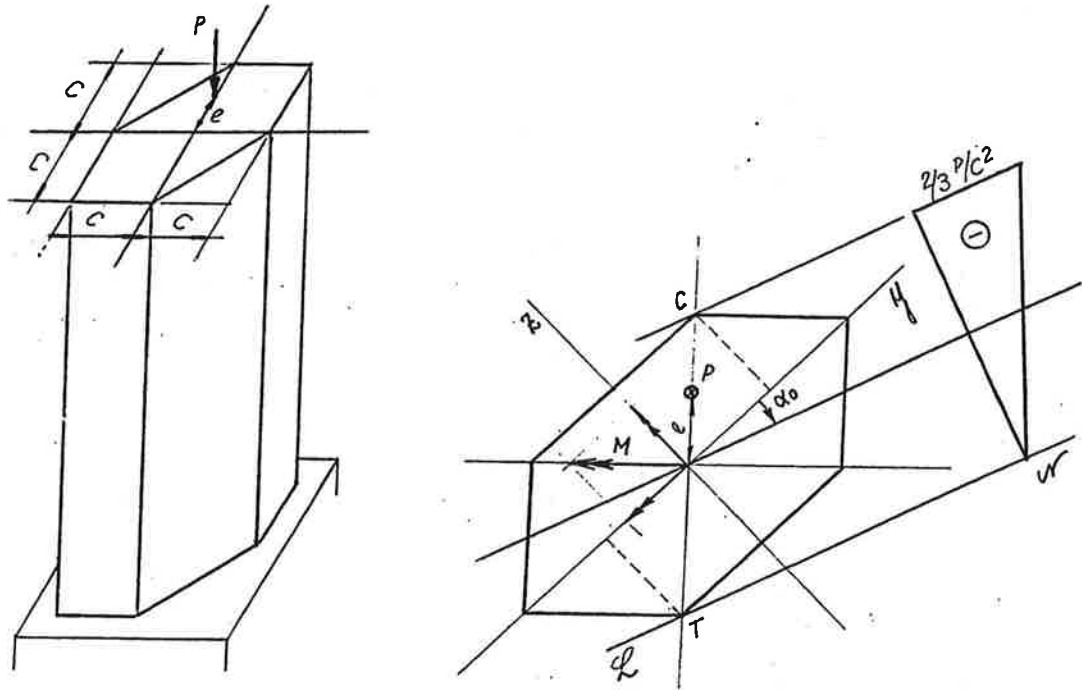
$$\sigma_{CMAX} = \max(\sigma_C) = \sigma_C(x = x_{CMAX}) = -\frac{75 Pa}{16 b^3} \quad (H'')$$

Se M_y e M_z fossem funções lineares de x , as expressões (E) e (F) seriam funções lineares de x , de modo que os valores máximos ocorreriam em um dos extremos do trecho III, isto é, em $x = 2a$ ou $x = 3a$.

EXEMPLO 3.

Dado o pilar da fig., determinar:

- a) a excentricidade e_{MAX} de modo que não ocorram tensões de tração.
- b) para o valor obtido no item anterior, a posição da linha neutra e o diagrama de tensões normais.



Em uma seção genérica, os esforços solicitantes relativos aos eixos centrais de inércia indicados na fig. são dados por:

$$N = -P \quad M_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} Pe \quad M_z = +\frac{\sqrt{2}}{2} Pe \quad (A)$$

Tratando-se de flexão oblíqua composta, a distribuição de tensões é dada por:

$$\sigma = -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} \quad (B)$$

onde:

$$S = 3c^2 \quad I_y = \frac{5}{12} c^4 \quad I_z = \frac{5}{4} c^4 \quad (C)$$

Substituindo na expressão (B) os valores de N , M_y e M_z dados pelas expressões (A) e os valores de S , I_y e I_z dados pelas expressões (C), obtém-se:

$$\sigma = -\frac{6\sqrt{2}}{5} \frac{Pe}{c^4} \left[\frac{y}{3} + z \right] - \frac{P}{3c^2} \quad (D)$$

Considerando a direção da linha neutra, caracterizada pelo ângulo α_0 , dado por:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{I_y}{I_z} \frac{M_z}{M_y} = -\frac{1}{3} \quad (E)$$

pode-se concluir, como se mostra na fig., que os pontos mais solicitados são os pontos C e T. Por ser o ponto C – simultaneamente comprimido pelos momentos M_y e M_z bem

como pela força normal N – o mais comprimido, segue-se que o ponto T é o mais tracionado.

Substituindo na expressão (D) as coordenadas do ponto T e do ponto C, obtém-se:

$$\sigma_{TMAX} = \sigma_T = \sigma\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}c, -\frac{\sqrt{2}}{2}c\right) = \frac{8 Pe}{5 c^3} - \frac{P}{3c^2} \quad (F')$$

$$\sigma_{CMAX} = \sigma_C = \sigma\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}c, +\frac{\sqrt{2}}{2}c\right) = -\frac{8 Pe}{5 c^3} - \frac{P}{3c^2} \quad (F'')$$

Impondo $\sigma_{TMAX} = 0$, resulta:

$$e = e_{MAX} = \frac{5}{24}c \quad (G)$$

de modo que, segundo a expressão (F''):

$$\sigma_{CMAX} = -\frac{2 P}{3 c^2} \quad (H)$$

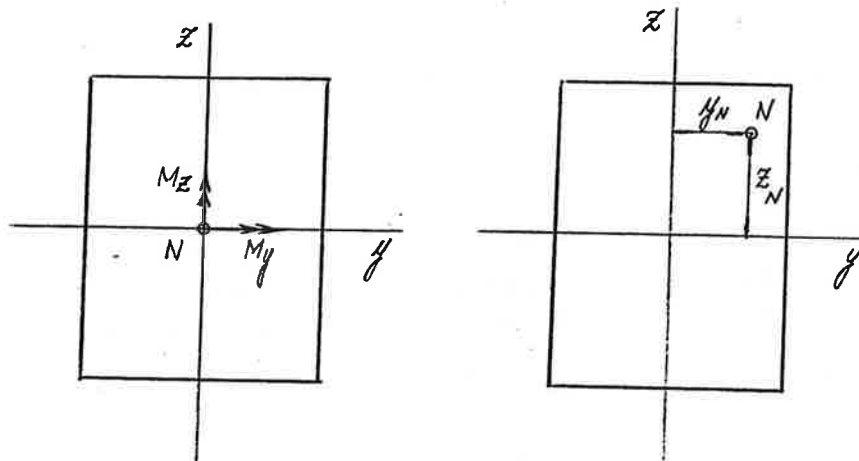
NÚCLEO CENTRAL DE INÉRCIA.

Na seção transversal de uma barra, submetida à flexão oblíqua composta, os esforços solicitantes – momentos fletores M_y e M_z e força normal N – são, como se mostra na fig., estaticamente equivalentes à força normal N aplicada em um ponto de coordenadas (y_N, z_N) tais que:

$$M_y = N \cdot z_N = N(e_N \operatorname{sen} \alpha) \Rightarrow z_N = \frac{M_y}{N} \quad (1')$$

$$M_z = -N \cdot y_N = -N(e_N \operatorname{cos} \alpha) \Rightarrow y_N = -\frac{M_z}{N} \quad (1'')$$

onde e_N é a excentricidade de N .



A distribuição de tensões normais é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{N}{S} = -\frac{(-Ny_N)}{I_z} y + \frac{(+Nz_N)}{I_y} z + \frac{N}{S} \\ &= \frac{N}{S} \left[\frac{y_N}{i_z^2} y + \frac{z_N}{i_y^2} z + 1 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

onde:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}} \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{S}} \quad (3)$$

são os raios de giração relativos aos eixos y e z .

Igualando a zero a tensão normal σ dada pela expressão (2), obtém-se a posição da linha neutra, dada por:

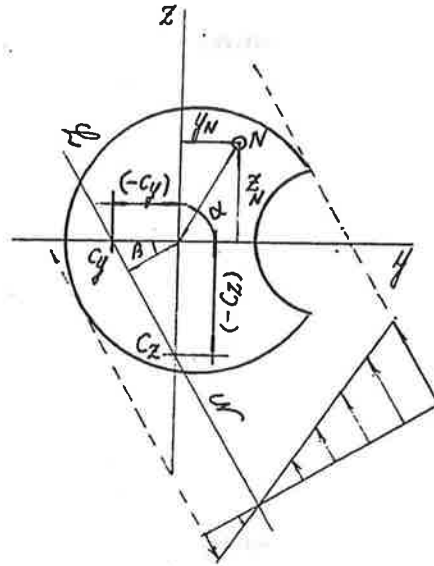
$$\frac{y_N}{i_z^2} y_0 + \frac{z_N}{i_y^2} z_0 + 1 = 0 \quad (4)$$

que pode ser caracterizada pelos valores c_y e c_z correspondentes aos pontos de intersecção com os eixos y e z , ou seja:

$$z_0 = 0 \Rightarrow y_0 = c_y = -\frac{i_z^2}{y_N} \quad (5')$$

$$y_0 = 0 \Rightarrow z_0 = c_z = -\frac{i_y^2}{z_N} \quad (5'')$$

São válidas as seguintes propriedades:



P1) Quando o ponto de aplicação de N se aproxima do centro de gravidade, a linha neutra se afasta desse ponto. De fato, de acordo com a fig.:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} \beta &= \frac{d}{(-c_z)} \\ \operatorname{cos} \beta &= \frac{d}{(-c_y)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2}{c_y^2} + \frac{d^2}{c_z^2} = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c_y^2} + \frac{1}{c_z^2}}} \quad (6)$$

Considerando as expressões (5) e, em seguida, as expressões (1), resulta:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{y_N}{i_z^2}\right]^2 + \left[\frac{z_N}{i_y^2}\right]^2}} = \frac{1}{e_N \sqrt{\left[\frac{\operatorname{cos} \alpha}{i_z^2}\right]^2 + \left[\frac{\operatorname{sen} \alpha}{i_y^2}\right]^2}} \quad (7)$$

de modo que d tende a infinito quando e_N tende a zero (tração ou compressão simples) e tende a zero quando e_N tende a infinito (flexão oblíqua simples).

P2) Quando o ponto de aplicação de N se desloca sobre uma reta, a linha neutra gira em torno de um ponto. De fato, dado um ponto da linha neutra de coordenadas $y_0 = y_0^*$ e $z_0 = z_0^*$, as coordenadas y_N e z_N do ponto de aplicação de N satisfazem a equação da reta:

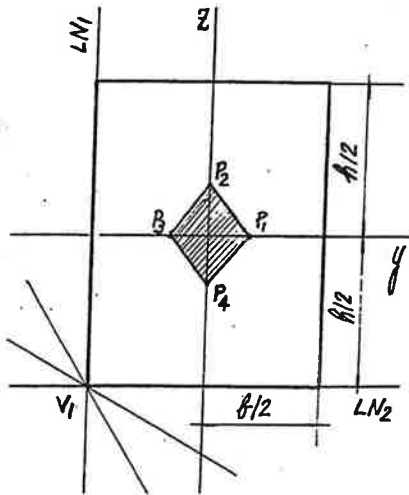
$$\frac{y_N}{i_z^2} y_0^* + \frac{z_N}{i_y^2} z_0^* + 1 = 0 \quad (8)$$

P3) O conjunto de pontos de aplicação de N aos quais correspondem linhas neutras que tangenciam o contorno da seção transversal delimitam uma região denominada *núcleo central de inércia*. Quando o ponto de aplicação N se situa no interior dessa região, a linha neutra não intercepta a seção transversal, de modo que a tensão normal em todos os pontos da seção tem o mesmo sinal de N.

EXEMPLOS.

Determinar o núcleo central de inércia das seções seguintes.

SEÇÃO RETANGULAR.



Para a seção retangular,

$$S = bh \quad (A')$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow i_y^2 = \frac{I_y}{S} = \frac{h^2}{12} \quad (A'')$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} \Rightarrow i_z^2 = \frac{I_z}{S} = \frac{b^2}{12} \quad (A''')$$

de modo que, a partir das expressões (5), pode-se escrever:

$$y_N = -\frac{i_z^2}{c_y} \Rightarrow y_N = -\frac{1}{12} \frac{b^2}{c_y} \quad (B')$$

$$z_N = -\frac{i_y^2}{c_z} \Rightarrow z_N = -\frac{1}{12} \frac{h^2}{c_z} \quad (B'')$$

Considerando, de acordo com a fig., as linhas neutras LN_1 e LN_2 , determinam-se, com as expressões (B), os pontos N_1 e N_2 , caracterizados por:

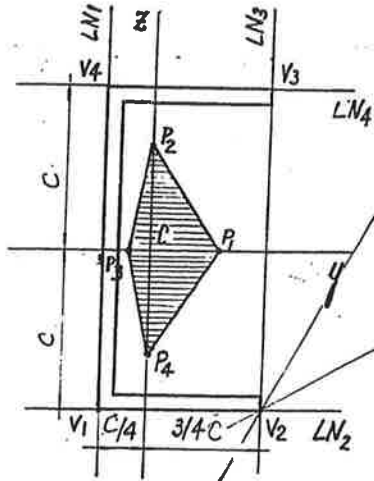
$$c_{y1} = -\frac{1}{2}b \Rightarrow y_{N1} = \frac{1}{6}b \quad c_{z1} \rightarrow \infty \Rightarrow z_{N1} = 0 \quad (C')$$

$$c_{y2} \rightarrow \infty \Rightarrow y_{N2} = 0 \quad c_{z2} = -\frac{1}{2}h \Rightarrow z_{N2} = \frac{1}{6}h \quad (C'')$$

Quando o ponto de aplicação de N se desloca sobre a reta que une os pontos N_1 e N_2 , a linha neutra gira em torno do vértice V_1 . Basta substituir as coordenadas de V_1 na equação (8), que se obtém a equação da reta que une os pontos N_1 e N_2 .

Os pontos N_3 e N_4 são obtidos por simetria.

SEÇÃO C.



Para a seção C,

$$S = 4\delta c \quad (A')$$

$$I_y = \frac{8}{3}\delta c^3 \Rightarrow i_y^2 = \frac{I_y}{S} = \frac{2}{3}c^2 \quad (A'')$$

$$I_z = \frac{5}{12}\delta c^3 \Rightarrow i_z^2 = \frac{I_z}{S} = \frac{5}{48}c^2 \quad (A''')$$

de modo que, a partir das expressões (5), pode-se escrever:

$$y_N = -\frac{i_z^2}{c_y} \Rightarrow y_N = -\frac{5}{48} \frac{c^2}{c_y} \quad (B')$$

$$z_N = -\frac{i_y^2}{c_z} \Rightarrow z_N = -\frac{2}{3} \frac{c^2}{c_z} \quad (B'')$$

Considerando, de acordo com a fig., as linhas neutras LN_1 , LN_2 e LN_3 , determinam-se, com as expressões (B), os pontos N_1 , N_2 e N_3 , caracterizados por:

$$c_{y1} = -\frac{1}{4}c \Rightarrow y_{N1} = \frac{5}{12}c \quad c_{z1} \rightarrow \infty \Rightarrow z_{N1} = 0 \quad (C')$$

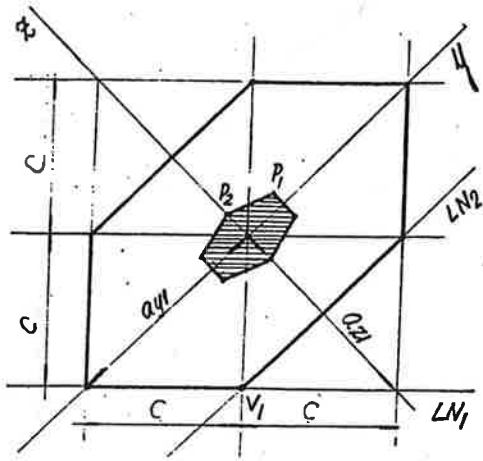
$$c_{y2} \rightarrow \infty \Rightarrow y_{N2} = 0 \quad c_{z2} = -c \Rightarrow z_{N2} = \frac{2}{3}c \quad (C'')$$

$$c_{y3} = +\frac{3}{4}c \Rightarrow y_{N3} = \frac{5}{36}c \quad c_{z3} \rightarrow \infty \Rightarrow z_{N3} = 0 \quad (C''')$$

Quando o ponto de aplicação de N se desloca sobre a reta que une os pontos N_2 e N_3 , a linha neutra gira em torno do vértice V_2 .

O ponto N_4 é obtido por simetria.

SEÇÃO HEXAGONAL DO EXEMPLO 3 DO ITEM ANTERIOR.



Para a seção hexagonal, relativamente aos eixos centrais de inércia indicados na fig.,

$$S = 3c^2 \quad (A')$$

$$I_y = \frac{5}{12}c^4 \Rightarrow i_y^2 = \frac{I_y}{S} = \frac{5}{36}c^2 \quad (A'')$$

$$I_z = \frac{5}{4}c^4 \Rightarrow i_z^2 = \frac{I_z}{S} = \frac{5}{12}c^2 \quad (A''')$$

de modo que, a partir das expressões (5), pode-se escrever:

$$y_N = -\frac{i_z^2}{c_y} \Rightarrow y_N = -\frac{5}{12} \frac{c^2}{c_y} \quad (B')$$

$$z_N = -\frac{i_y^2}{c_z} \Rightarrow z_N = -\frac{5}{36} \frac{c^2}{c_z} \quad (B'')$$

Considerando, de acordo com a fig., as linhas neutras LN_1 e LN_2 ; determinam-se, com as expressões (B), os pontos N_1 e N_2 , caracterizados por:

$$c_{y1} = -\sqrt{2}c \Rightarrow y_{N1} = \frac{5\sqrt{2}}{24}c \quad c_{z1} = -\sqrt{2}c \Rightarrow z_{N1} = \frac{5\sqrt{2}}{72}c \quad (C')$$

$$c_{y2} \rightarrow \infty \Rightarrow y_{N2} = 0 \quad c_{z2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}c \Rightarrow z_{N2} = \frac{5\sqrt{2}}{36}c \quad (C'')$$

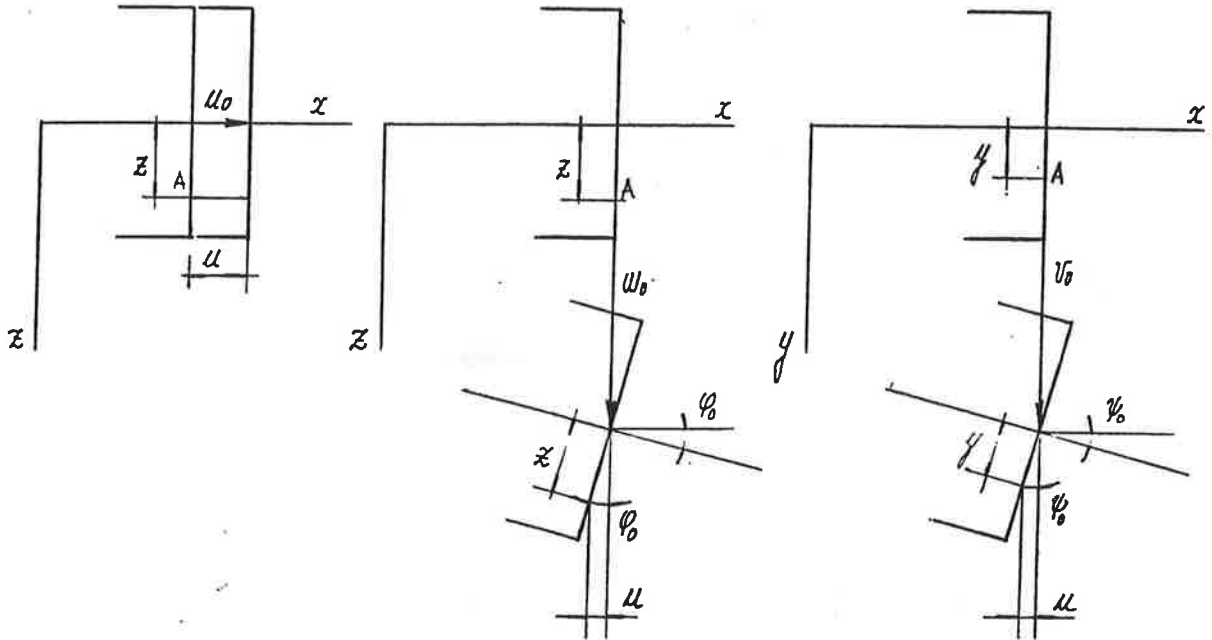
Quando o ponto de aplicação de N se desloca sobre a reta que une os pontos N_1 e N_2 , a linha neutra gira em torno do vértice V_1 .

Os demais pontos são obtidos por simetria.

DESLOCAMENTOS.

Na flexão oblíqua composta, já se sabe, as seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo na configuração deformada.

O deslocamento da seção transversal corresponde a um movimento de corpo rígido que pode ser decomposto, como se mostra na fig., nas seguintes parcelas:



deslocamento longitudinal - caracterizado pelo deslocamento u_0 do centro de gravidade da seção - de modo que o deslocamento do ponto A, de coordenadas (x,y,z) , é dado por:

$$u = u_0 \quad v = 0 \quad w = 0 \quad (1)$$

deslocamento transversal segundo o eixo z - caracterizado pelo deslocamento w_0 do centro de gravidade da seção - e *rotação da seção segundo o eixo y* - caracterizada pelo ângulo φ_0 , dado, uma vez que a seção permanece perpendicular ao eixo, por:

$$\varphi_0 \approx \text{tg}\varphi_0 = \frac{dw_0}{dx} \quad (2)$$

de modo que o deslocamento do ponto A é dado por:

$$u = -\text{sen}\varphi_0 z \approx -\text{tg}\varphi_0 z = -\frac{dw_0}{dx} z \quad v = 0 \quad w = w_0 \quad (3)$$

deslocamento transversal segundo o eixo y - caracterizado pelo deslocamento v_0 do centro de gravidade da seção - e *rotação da seção segundo a direção z* - caracterizada pelo ângulo ψ_0 , dado, uma vez que a seção permanece perpendicular ao eixo, por:

$$\psi_0 \approx \text{tg}\psi_0 = \frac{dv_0}{dx} \quad (4)$$

de modo que o deslocamento do ponto A é dado por:

$$u = -\text{sen}\psi_0 y \approx -\text{tg}\psi_0 y = -\frac{dv_0}{dx} y \quad v = v_0 \quad w = 0 \quad (5)$$

Considerando as expressões (1), (3) e (5), pode-se escrever:

$$u = u_0 - \frac{dw_0}{dx}z - \frac{dv_0}{dx}y \quad v = v_0 \quad w = w_0 \quad (6)$$

A deformação de um segmento $AB = dx$ é dada, como se mostra no apêndice, por:

$$\varepsilon = \frac{du_0}{dx} - \frac{d^2w_0}{dx^2}z - \frac{d^2v_0}{dx^2}y = Ay + Bz + C \quad (7)$$

A partir deste ponto, pode-se retornar à expressão (2) do item tensões normais e concluir, uma vez determinadas as constantes A, B, C pelas expressões (5), que:

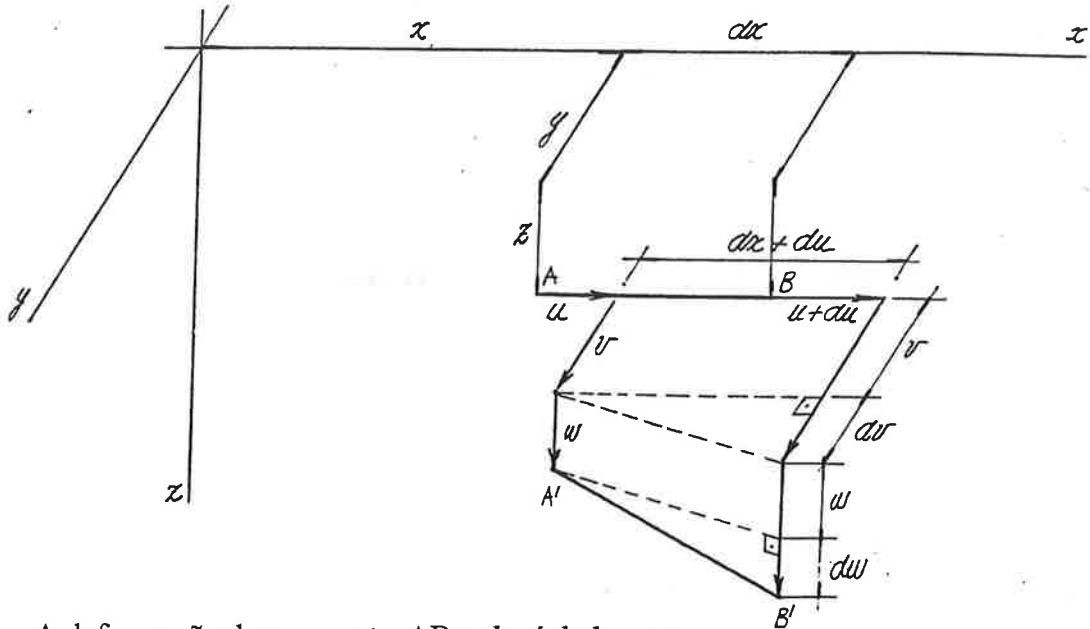
$$\frac{du_0}{dx} = \frac{N}{ES} \quad \frac{d^2w_0}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y} \quad \frac{d^2v_0}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (8)$$

A integração das equações diferenciais acima permite obter as componentes $u_0(x)$, $v_0(x)$, $w_0(x)$ do deslocamento de um ponto do eixo.

APÊNDICE.

DEFORMAÇÃO LINEAR.

Em uma barra, considerem-se, como se mostra na fig., os pontos A, de coordenadas $[x, y, z]$, e B, de coordenadas $[x + dx, y, z]$, na configuração indeformada (anterior ao carregamento), aos quais correspondem os pontos A', de coordenadas $[x + u, y + v, z + w]$, e B', de coordenadas $[x + dx + (u + du), y + (v + dv), z + (w + dw)]$ na configuração deformada (posterior ao carregamento).



A deformação do segmento $AB = dx$ é dada por:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (1)$$

Considerando os dois triângulos retângulos indicados na fig., pode-se escrever:

$$\begin{aligned} A'B' &= \sqrt{(dx + du)^2 + dv^2 + dw^2} \\ &= \left[\sqrt{1 + 2\left(\frac{du}{dx}\right) + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \right] dx \end{aligned} \quad (2)$$

Desenvolvendo em série a expressão anterior, pode-se escrever:

$$A'B' = \left[1 + \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \right] dx \quad (3)$$

Retornado à expressão (1), tem-se:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 \quad (4)$$

Nos casos que estamos considerando, os termos $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dw}{dx}$ são da ordem de grandeza das deformações, isto é, da ordem de 10^{-3} , de modo que, desprezando o quadrado desses termos, resulta:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (5)$$