PEF-2201 Resistência dos Materiais e Estática das Construções I

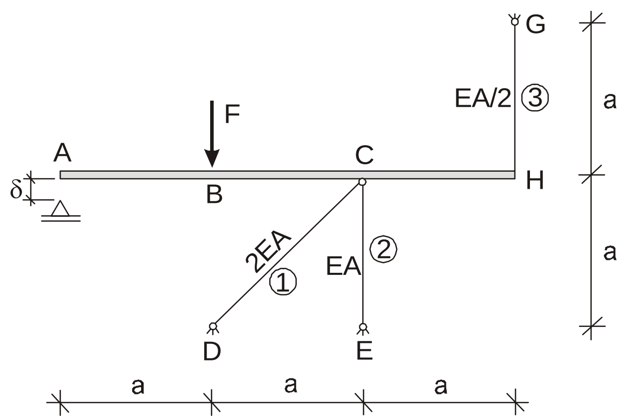
1ª Prova – 13/09/2002

Questão 2 (5,0 pontos)

Na estrutura abaixo, o valor de F varia de 0 a P. Pede-se determinar:

a) O valor de F para o qual a extremidade A encosta no apoio;
b) As forças normais e as componentes do deslocamento em H para a situação final nas qual F = P.

São dados: $\delta = \dfrac{4Pa}{EA}$; ABCH indeformável.

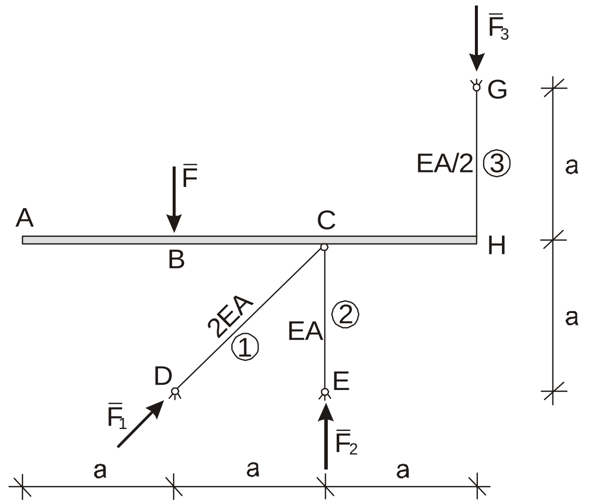


Resposta:

Para valores de F até $\overline{F}$ a estrutura não encosta no apoio A, de modo que a estrutura é isostática. Após encostar em A, com F variando de $\overline{F}$ a P a estrutura é hiperestática com grau igual a 1.

O valor de $\overline{F}$ é aquele para o qual $\overline{v}_A = \delta$.

Sendo a estrutura isostática para $F \le \overline{F}$, calculam-se as forças normais com auxílio das equações de equilíbrio que as determinam.



$$\sum M_C = 0 \quad \bar{F}_3.a = \bar{F}.a$$

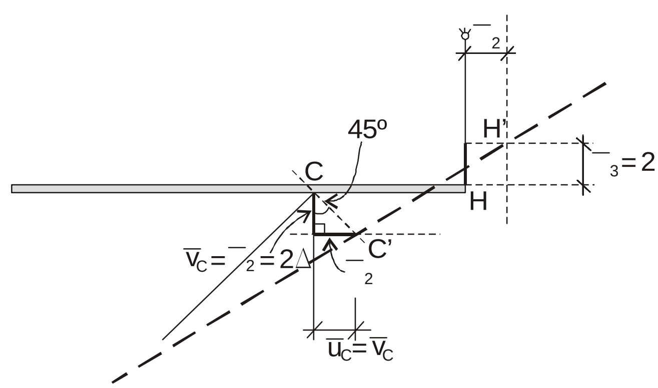
$$\sum V = 0 \quad \bar{F}_3 + \bar{F} = \bar{F}_2 \quad \therefore \quad 2\bar{F} = \bar{F}_2$$

$$\sum H = 0 \quad \bar{F}_1.\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \therefore \quad \bar{F}_1 = 0$$

Deslocamento: $\bar{\Delta}_1 = 0$ (nulo)

$$\bar{\Delta}_2 = \frac{\bar{F}_2.l_{CE}}{(EA)} = \frac{2\bar{F}a}{EA} = 2\Delta \quad \text{(encurtamento)} \quad \Delta = \frac{\bar{F}a}{EA}$$

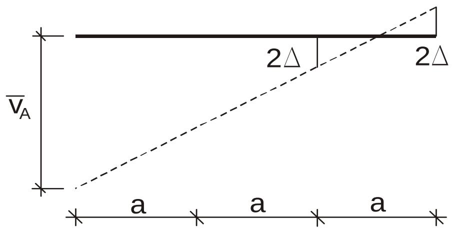
$$\bar{\Delta}_3 = \frac{\bar{F}_3.l_{GH}}{(EA)} = \frac{\bar{F}a}{EA/2} = \frac{2\bar{F}a}{EA} = 2\Delta \quad \text{(encurtamento)}$$



CC' é determinado pelas variações de comprimento $\bar{\Delta}_2 = 2$ e $\bar{\Delta}_1 = 0$.

HH' é determinado pela variação de comprimento $\bar{\Delta}_3 = 2$ e pelas condição CH = C'H', pois a barra CF é indeformável (lembrando que o deslocamento na perpendicular ao eixo da barra não representa modificação no comprimento).

Considerando apenas os deslocamentos verticais, pois A também desloca $\bar{\Delta}_2 = 2\Delta$ para a direita na horizontal, obtém-se

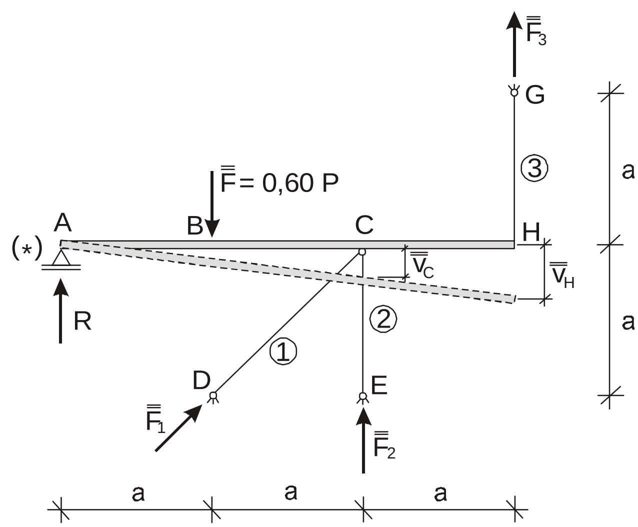


$$\bar{v}_A = 10\frac{\bar{F}a}{EA}$$

Portanto, $\bar{v}_A = 10\dfrac{\bar{F}a}{EA} = \delta = \dfrac{4Pa}{EA} \quad \Rightarrow \quad \bar{F} = \dfrac{4}{10}P = 0{,}40P$

$$\boxed{\bar{F}_1 = 0}\ ;\ \boxed{\bar{F}_2 = 2\bar{F} = \frac{8}{10}P}\ ;\ \bar{F}_3 = \bar{F}_2 - \bar{F} = \frac{8P}{10} - \frac{4P}{10} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{F}_3 = \frac{4P}{10}}$$

Resta, portanto, aplicar 0,60P ($\bar{\bar{F}}$) à estrutura hiperestática.



(*) Considerando que δ é muito pequeno, a estrutura é a inicial, indeformada.

Equações de equilíbrio:

$$\sum H = 0 \quad \bar{\bar{F}}_1\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum V = 0 \quad R + \bar{\bar{F}}_2 + \bar{\bar{F}}_1\frac{\sqrt{2}}{2} + \bar{\bar{F}}_3 = 0{,}60P = \bar{\bar{F}}$$

$$\sum M_C = 0 \quad R.2a - \bar{\bar{F}}.a = \bar{\bar{F}}_3.a$$

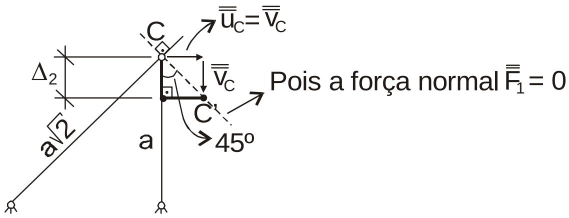
Portanto,

$$R + \bar{\bar{F}}_2 + \bar{\bar{F}}_3 = \bar{\bar{F}} \quad (1)$$

$$2R - \bar{\bar{F}}_3 = \bar{\bar{F}} \quad (2)$$

Ignorando os deslocamentos horizontais, determinados por u_C, pois u_A e u_F estão livres nessa direção, a equação de compatibilidade é:

$$\frac{\bar{\bar{v}}_H}{3a} = \frac{\bar{\bar{v}}_C}{2a} \quad \text{ou} \quad 2\bar{\bar{v}}_H = 3\bar{\bar{v}}_C \qquad (3)$$



Assim, $\bar{\bar{v}}_C = \Delta_2 = \dfrac{\bar{\bar{F}}_2\, a}{EA}$

Como $\bar{\bar{v}}_H = \Delta_3 = \dfrac{\bar{\bar{F}}_3\, a}{EA/2} = \dfrac{2\bar{\bar{F}}_3\, a}{EA}$

Em (3) $2.\dfrac{2\bar{\bar{F}}_3\, a}{EA} = \dfrac{3\bar{\bar{F}}_2\, a}{EA} \quad \Rightarrow \quad 4\bar{\bar{F}}_3 = 3\bar{\bar{F}}_2 \qquad (3')$

De (2) $\bar{\bar{F}}_3 = 2R - \bar{\bar{F}}$

De (3’) $\bar{\bar{F}}_2 = \dfrac{4}{3}\bar{\bar{F}}_3 = \dfrac{4}{3}\left(2R - \bar{\bar{F}}\right) = \dfrac{8R}{3} - \dfrac{4\bar{\bar{F}}}{3}$

Em (1)

$$R + \frac{8R}{3} - \frac{4\bar{\bar{F}}}{3} + 2R - \bar{\bar{F}} = \bar{\bar{F}}$$

$$3R + \frac{8R}{3} = \bar{\bar{F}} + \bar{\bar{F}} + \frac{4\bar{\bar{F}}}{3}$$

$$\frac{17R}{3} = \frac{10\bar{\bar{F}}}{3} \quad \therefore \quad R = \frac{10\bar{\bar{F}}}{17}$$

$$R = \frac{10.(0{,}60P)}{17} = 0{,}3529P \quad \text{ou} \quad \frac{6P}{17}$$

Então,

$$\overline{\overline{F}}_2 = \frac{8R}{3} - \frac{4\overline{\overline{F}}}{3} = \frac{8.6.P}{3.17} - \frac{4.0,60.P}{3} = \frac{7,2P}{3.17} = \frac{2,4P}{17} = 0,1411\,P$$

$$\overline{\overline{F}}_3 = 2R - \overline{\overline{F}} = 2.\frac{6P}{17} - 0,60P = \frac{1,8P}{17} = 0,1058\,P$$

$$\overline{\overline{u}}_H = \overline{\overline{u}}_C = \overline{\overline{v}}_C = \frac{\overline{\overline{F}}_2 a}{EA} = \frac{2,4\,Pa}{17\,EA} = \frac{0,1411\,Pa}{EA}$$

$$\overline{\overline{v}}_H = \frac{2\overline{\overline{F}}_3 a}{EA} = \frac{3,6\,Pa}{17\,EA} = \frac{0,2116\,Pa}{EA}$$

Forças Normais:

$$F_1 = \overline{F}_1 + \overline{\overline{F}}_1 = 0 + 0 = 0$$

$$F_2 = \overline{F}_2 + \overline{\overline{F}}_2 = \frac{8P}{10} + \frac{2,4P}{17} = \frac{16P}{17} = 0,9411\,P \quad \text{(compressão)}$$

$$F_3 = -\overline{F}_3 + \overline{\overline{F}}_3 = -\frac{4P}{10} + \frac{1,8P}{17} = -0,4P + 0,1058P = -0,2941\,P$$

$$F_3 = 0,2941\,P \quad \text{(compressão)}$$

Componentes do deslocamento em H:

$$u_C = \overline{\overline{u}}_C + \overline{u}_C = \frac{2\overline{F}a}{EA} + \frac{2,4Pa}{17\,EA}$$

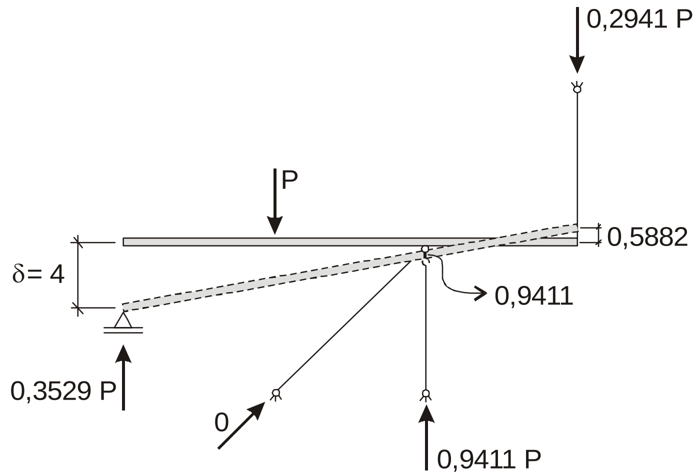
$$u_H = u_C = \frac{2.0,4Pa}{EA} + \frac{2,4Pa}{17\,EA} = \frac{16Pa}{17\,EA} = 0,9411\frac{Pa}{EA} \quad \rightarrow$$

ou $\quad u_C = \dfrac{F_2\,a}{EA} = 0,9411\,\dfrac{Pa}{EA} \quad \rightarrow$

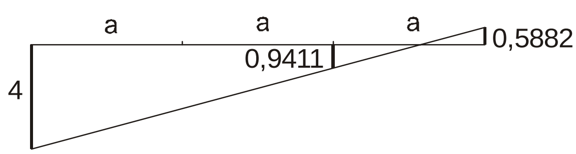
$$v_H = \overline{\overline{v}}_H + \overline{v}_H = -\frac{2\overline{F}\,a}{EA} + \frac{3,6}{17}\frac{Pa}{EA} = -\frac{10Pa}{17\,EA} = -0,5882\,\frac{Pa}{EA} \quad \uparrow$$

ou $\quad v_H = \dfrac{F_3\,a}{EA/2} = \dfrac{2F_3\,a}{EA} = -0,5882\,\dfrac{Pa}{EA} \quad \uparrow$

Resumo:



Confirmando:



$$\frac{4-0{,}9411}{2a}=\frac{1{,}5294}{a}$$

$$\frac{0{,}5882-0{,}9411}{1a}=\frac{1{,}5293}{a} \quad \therefore \quad \text{OK.}$$