Física para Engenharia II

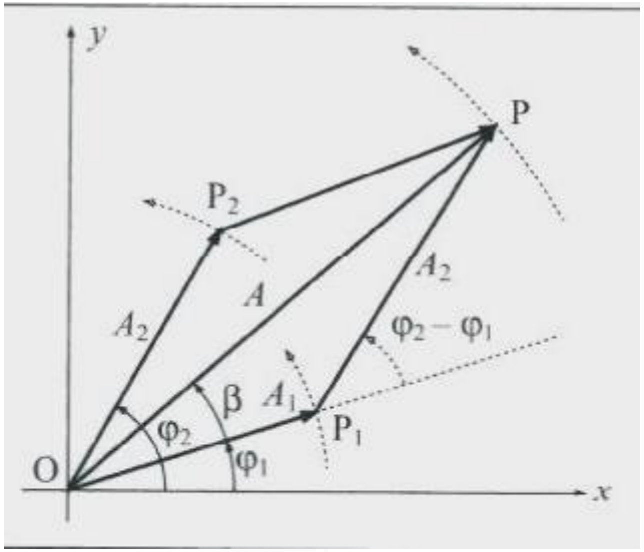
Profa. Márcia Regina Dias Rodrigues
Depto. Física Nuclear – IF – USP
Ed. Oscar Sala, sala 222
marciadr@if.usp.br

Superposição de MHS

Mesma direção e frequência

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$



Lei dos cossenos e dos senos

$$A^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{A_2}{sen\beta} = \frac{A}{sen(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$sen\beta = \frac{A_2}{A} sen(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\mathrm{x}(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi_1 + \beta)$$

$$z_1 + z_2 = A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

$$z_1 + z_2 = e^{i(\omega t + \varphi_1)} \underbrace{\left[A_1 + A_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}\right]}_{Ae^{i\beta}}$$

Superposição de MHS

Mesma direção e frequências diferentes

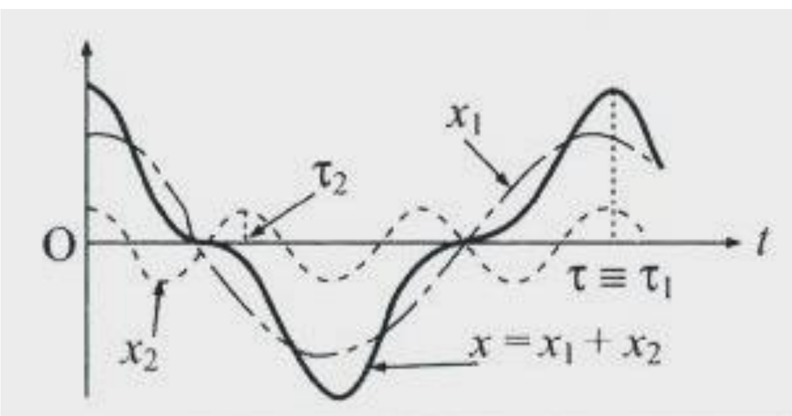
$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\theta_2 - \theta_1 = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 = 0$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

Em geral não será um movimento periódico



Para que exista um período τ, em que $x1$ e $x2$ voltem simultaneamente ao valor inicial

$$\omega_1 \tau = 2n_1\pi$$

$$\omega_2 \tau = 2n_2\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$n_1\tau_1 = n_2\tau_2 = \tau$$

$$A_1 = 3A_2 \qquad \tau_1 = 3\tau_2$$

Superposição de MHS

Mesma direção e frequências diferentes

Batimentos

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

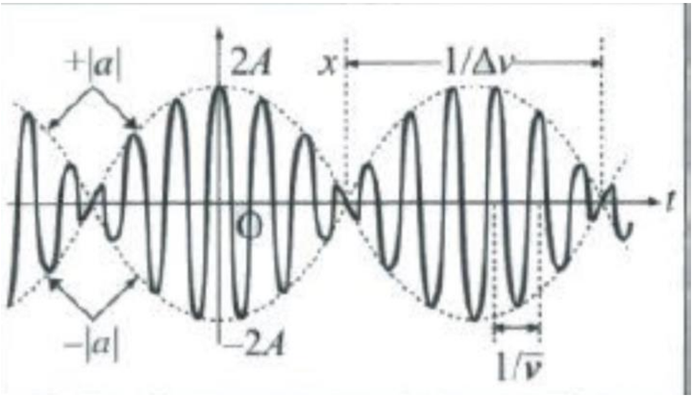
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 = 0$$

$$A_1 = A_2 = A \qquad \omega_1 > \omega_2$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) = \frac{2\pi}{\bar{\tau}} = 2\pi\bar{\nu}$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi\Delta\nu\ (> 0)$$



$$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega \qquad \omega_2 = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega$$

$$x = A\left\{cos\left(\bar{\omega}t + \frac{\Delta\omega}{2}t\right) + cos\left(\bar{\omega}t - \frac{\Delta\omega}{2}\mathrm{t}\right)\right\}$$

$$x = 2A\left\{cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)cos(\bar{\omega}\mathrm{t}\ )\right\}$$

Superposição de MHS

Mesma direção e frequências diferentes

Batimentos

$$\omega_1 \approx \omega_2$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

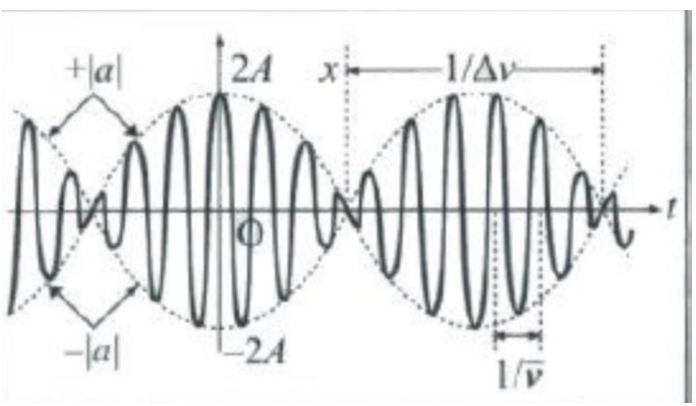
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 = 0$$

$$A_1 = A_2 = A \qquad \omega_1 > \omega_2$$

$$x = 2A\left\{cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)cos(\overline{\omega}\mathrm{t})\right\}$$

$$\Delta\omega \ll \overline{\omega}$$



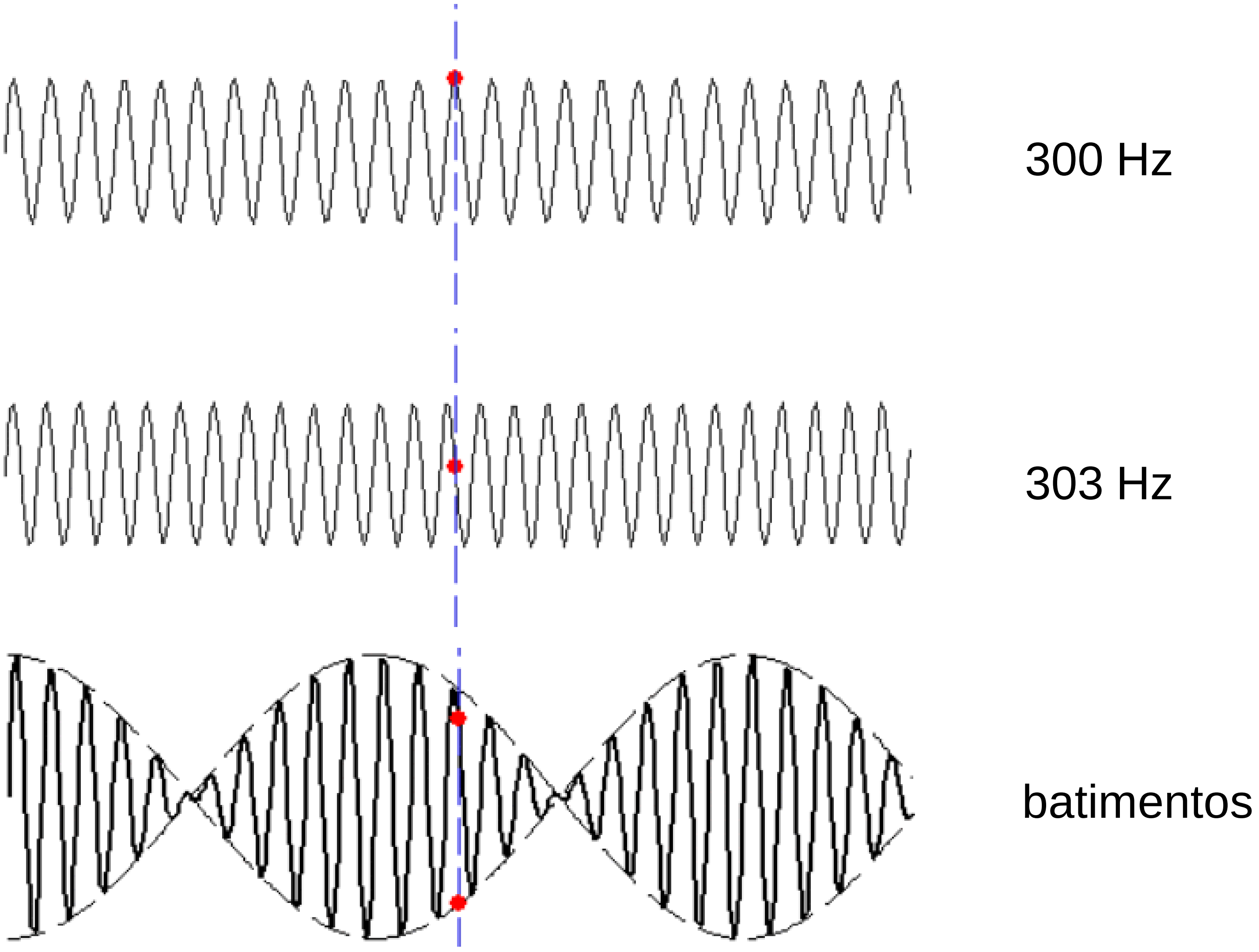
$$cos(\overline{\omega}\mathrm{t})$$

Oscila mais rapidamente

$$a(t) = 2Acos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

envoltória

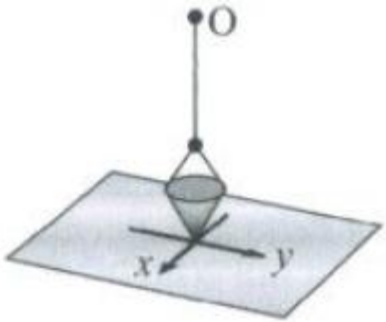
Modulação da amplitude → **Batimentos**



http://resource.isvr.soton.ac.uk/spcg/tutorial/tutorial/Tutorial_files/Web-hearing-beats.htm

Superposição de MHS

Mesma frequências e direções perpendiculares



Oscilador harmônico bidimensional

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -k\vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = 0 \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y(t) = B\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\varphi_1 = 0$$

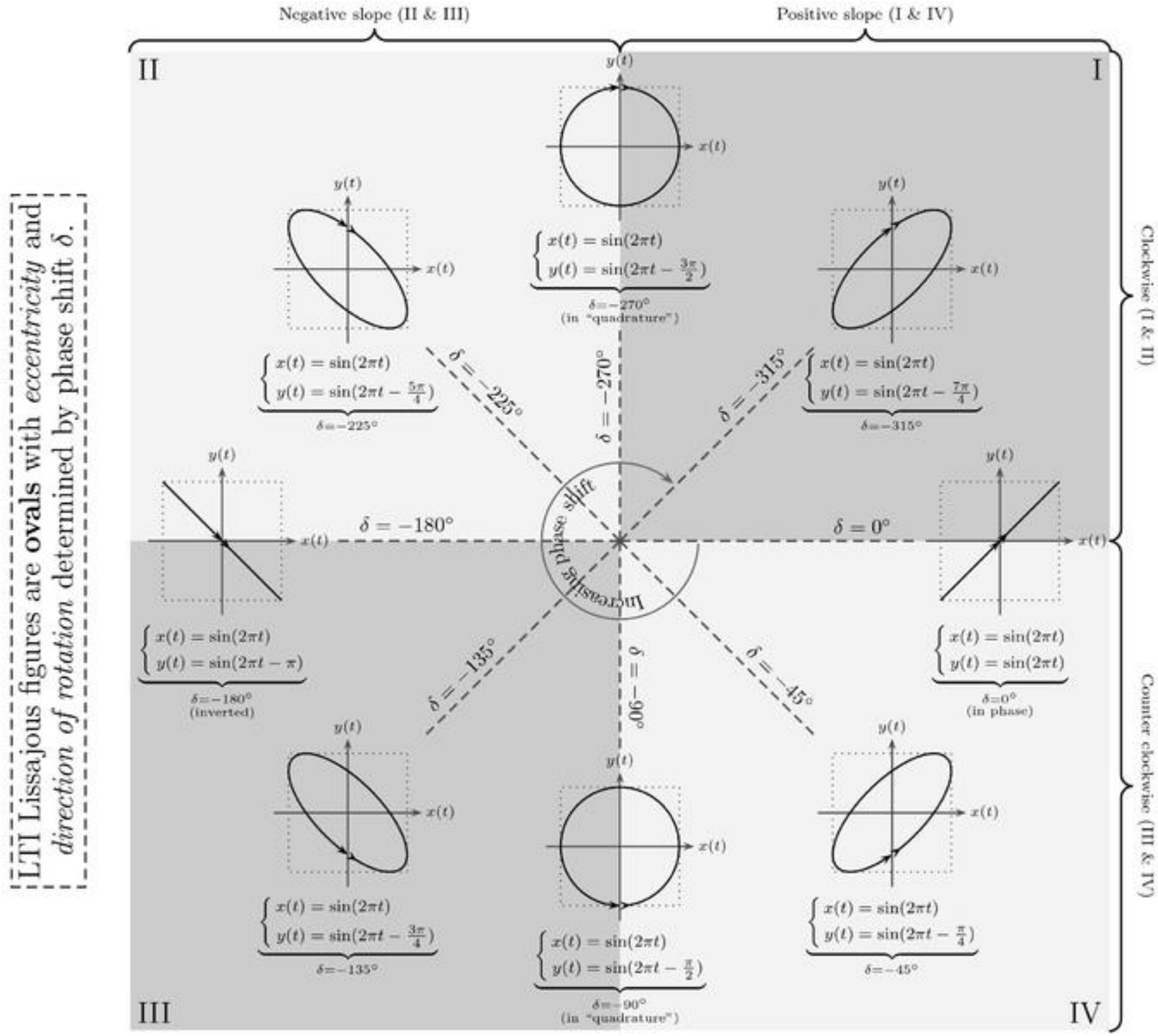
$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) \\ y(t) = B\cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t)\, cos\varphi - sen(\omega t) sen\varphi$$

$$= \frac{x}{A} cos\varphi \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\, sen\varphi$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 2\frac{xy}{AB} cos\varphi = sen^2\varphi$$

Geralmente uma elipse inscrita num retângulo de lados A e B



$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-2\frac{xy}{AB}cos\varphi = sen^2\varphi$$

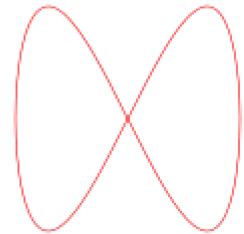
Superposição de MHS

Frequências diferentes e direções perpendiculares

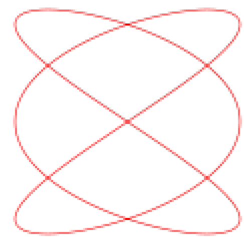
Curvas de Lissajous

$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = \pi\,/\,2$

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) = \mathrm{B}\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$



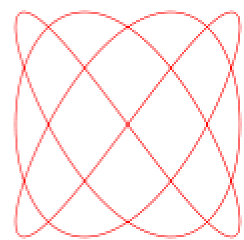
ω_1 = 1, ω_2 = 2 (1:2)



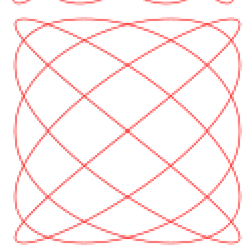
ω_1 = 3, ω_2 = 2 (3:2)

$$n_1\tau_1 = n_2\tau_2 = \tau$$

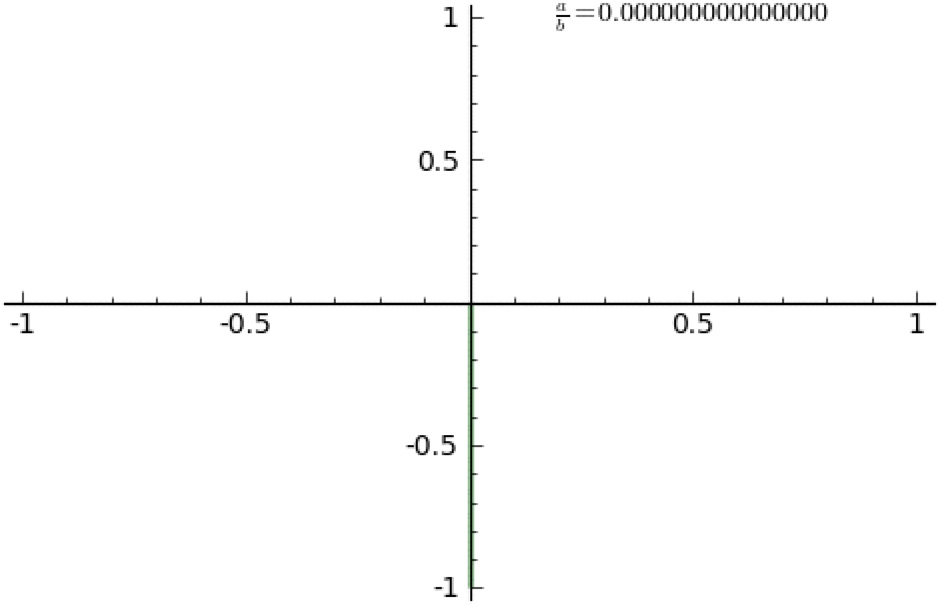
comensuráveis



ω_1 = 3, ω_2 = 4 (3:4)



ω_1 = 5, ω_2 = 4 (5:4)



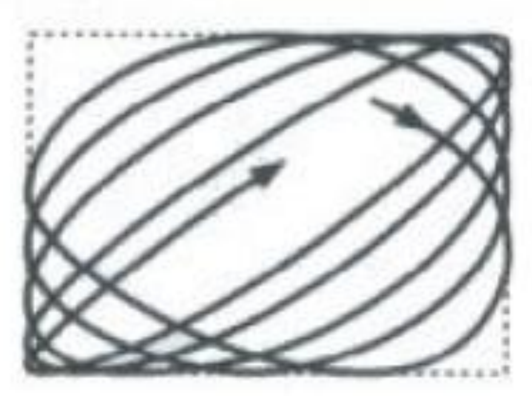
$\frac{a}{b} = 0.000000000000000$
1
0.5
-0.5
-1
-1
-0.5
0.5
1

Superposição de MHS

Frequências diferentes e direções perpendiculares

Curvas de Lissajous

incomensuráveis



Trajetória não é periódica, a curva não se fecha